マルチンゲール

司馬博文

2026 年 7 月 8 日

1 Doléans-Dade 前測度

マルチンゲールは，Doléans-Dade 測度の消えた，純粋な確率過程的対象だと考えることができる．ほとんどの確率過程（クラス (L.D.) に属する擬似マルチンゲール）はマルチンゲールと可予測な有界変動過程に分解できる（定理 1.4）が，有界変動過程とは本質的に可予測 σ-代数上の測度である．

伊藤の確率積分は駆動過程として Brown 運動を考えたが，一般の L^2-マルチンゲールに拡張された後，Strasbourg 学派 (Meyer, 1967; Doléans-Dade and Meyer, 1970) によって一般の擬似／セミマルチンゲールに拡張された．有界変動過程に関する積分とは，背後にある測度に関する積分に他ならないことを考えると，真に確率過程的な現象（確率積分など）はマルチンゲールのみが起こすものと思える．

マルチンゲールは本質的に X_∞ の拡大するフィルトレーションに関する条件付き期待値の列だとみれ，マルコフ過程が初期値を忘却していくエルゴード定理の「逆」とみることもできる (Doob, 1971).

1.1 可予測集合

$I\subset\mathbb{R}_+$ を一般の集合とし，同一の確率空間 $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上に定義された確率変数の族 $X=(X_t)_{t\in I}$ を考える（離散時間と連続時間を統一的に扱う）．この X は $(\Omega,\mathcal{F},\mathrm{P})$ 上のフィルトレーション $\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)$ に関して適合的であるとする．4-組 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathrm{P})$ を**確率基底**と呼び，以下これを固定する．次に定義していく $I\times\Omega$ 上の集合族も，マルチンゲールの定義も，暗黙理にはこの確率基底（特に $\mathbb{F}$ と P）に依存するが，ここでは簡単のため記法から省略する．

添字集合 $I\subset\mathbb{R}_+$ と確率基底 $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F},\mathrm{P})$ について，次で定まる集合族 $\mathcal{R}_I\subset I\times\Omega$ 元を**可予測矩形**と呼ぶ：

$$\mathcal{R}_I:=\{(s,t]\times F\mid s<t\in I,F\in\mathcal{F}_s\}\cup\{[0,\inf I]\times F\mid F\in\mathcal{F}_0\}.$$

$\mathcal{R}_I$ が生成する集合環（＝全体集合を含むとは限らない有限加法族）を $\mathcal{A}_I$ で，$\mathcal{R}_I$ が生成する σ-代数を $\mathcal{P}$ で表し，それぞれ**可予測環**，**可予測 σ-代数**という．

1.2 マルチンゲールと劣マルチンゲール

定義 1.1 (Doléans-Dade 1968). $\{X_t\}_{t\in I}\subset L^1(\Omega)$ を可積分な過程とする．$\{X_t\}$ の **Doléans-Dade 前測度**とは，次で定まる可予測環 $\mathcal{A}$ 上の有限加法的測度 $\lambda_X:\mathcal{A}_I\to\mathbb{R}$ をいう：

$$\lambda_X\Big((s,t]\times F\Big)=\mathrm{E}[1_F(X_t-X_s)],\qquad s<t,F\in\mathcal{F}_s,$$
$$\lambda_X([0,\inf I]\times F)=0,\qquad F\in\mathcal{F}_0.$$

定義 1.2 (submartingale (Snell, 1952), quasimartingale (Fisk, 1965)). 可積分過程 $\{X_t\}\subset L^1(\Omega)$ について，

(1) Doléans-Dade 前測度が消える $\lambda_X=0$ とき，X は**マルチンゲール**であるという．
(2) $\lambda_X=0$ が正値，すなわち $[0,\infty)$ に値を取るとき，X は**劣マルチンゲール**であるという．
(3) λ_X が任意の有界可予測集合 $(0,t]\times\Omega$ 上で有界変動であるとき，X は**擬似マルチンゲール**であるという．

λ_X は $I\times\Omega$ 上では有限加法的でしかないことに注意．有限加法的に過ぎない集合関数は，$\mathbb{R}$ に値を取っていても有界変動とは限らないことに注意 (Giesy, 1970)．一方で，σ-加法的な符号付き測度について，$\mathbb{R}$-値であることと有界変動であることは同値になる (Dunford and Schwartz, 1958, 補題 III.4.4).

1.3 Doob–Meyer 分解

上述のようにマルチンゲールを理解することの利点は，測度論の部分と確率過程の部分とを明確に分離できる点である．このことを示すために，ここでは Doob–Meyer 分解の概要を証明なしに見る．

定義 1.3 (class (L.D.) Meyer 1966). 可積分過程 X の Doléans-Dade 前測度が，有界な可予測集合のなす δ-環

$$\mathcal{P}_b := \{A \in \mathcal{P} \mid \exists_{t \geqslant 0}\ A \subset [0,t] \times \Omega\}$$

上の σ-加法的な $\mathbb{R}$-値測度に延長できるとき，X は局所 Doob クラス，または端的にクラス (L.D.) であるという．

$I = \mathbb{R}_+$ とする．Doléans-Dade 測度 μ_X が正値なとき，単調増加な càdlàg 過程 V と一対一対応し，次の関係にある：

$$\mu_X(A) = \mathrm{E}\left[\int_0^\infty 1_A(s)\,dV_s\right], \qquad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F}.$$

つまり，一般にクラス (L.D.) の可積分過程の Doléans-Dade 測度 μ_X は，ある可予測な有界変動過程から生じるものである．これが Doob–Meyer 分解である．

定理 1.4 (Meyer 1962). X をクラス (L.D.) の劣マルチンゲールとする．このとき，ただ一つの可予測な右連続単調増加過程 V で $V_0 = 0$ を満たすものが存在して，$S - V$ はマルチンゲールになる．

[証明]. Métivier (1982, p.96 系 15.4) を参照．ここでは概略のみを述べる．クラス (L.D.) の劣マルチンゲールの Doleans 測度は $\mathcal{P}$ 上の許容測度の例になる．許容測度の一般論から，ただ一つの可予測な右連続単調増加過程 V で $V_0 = 0$ を満たすものが存在して，$\mu = \mu_V$ が成り立つ．よって残った過程 $S - V$ の Doleans 測度は消えており，$S - V$ はマルチンゲールである． ■

2 マルチンゲールの任意停止

ランダムな時区間を，$\mathbb{R}_+ \times \Omega$ の部分集合

$$(\sigma, \tau] := \{(t,\omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \mid \sigma(\omega) < t \leqslant \tau(\omega)\}$$

と理解する．

命題 2.1 . $I \subset \mathbb{R}_+$ を集合，$\{X_t\} \subset L^1(\Omega)$ を可積分過程とする．2つの停止時 $\sigma, \tau : \Omega \to I$ は値域が有限で $\sigma \leqslant \tau$ を満たすとする．このとき，ランダム集合 $(\sigma, \tau]$ は可予測環 $\mathcal{A}_I$ の元で，次が成り立つ：

$$\lambda_X([\sigma, \tau)) = \mathrm{E}[X_\tau - X_\sigma].$$

[証明]. $I = \{t_0 < \cdots < t_n\}$ と表す．

$$(t_0, \tau] \in \mathcal{A}_I, \qquad \lambda_X((t_0, \tau]) = \mathrm{E}[X_\tau - X_{t_0}]$$

を示せば，あとは $(\sigma, \tau] = (t_0, \tau] \backslash (t_0, \sigma]$ から従う．すると主張は次の事実から直ちに従う：

$$(t_0, \tau] = \bigcup_{i=1}^n (t_{i-1}, t_i] \times \{\tau > t_{i-1}\}.$$

実際，λ_X の定義と有限加法性から

$$\lambda_X((t_0, \tau]) = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}\left[1_{\{\tau > t_{i-1}\}}(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})\right] = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}\left[1_{\{\tau = t_i\}}(X_{t_i} - X_{t_0})\right] = \mathrm{E}[X_\tau - X_{t_0}].$$

■

注 2.2 (連続版の任意停止への道のり)**.** X がクラス (L.D.) に属する右連続過程であるとき，一般の有限値停止時 $\sigma \leqslant \tau$ について成り立つ．これは τ に上から収束する有限値停止時の列 $\{\tau_n\}$ を取り，マルチンゲール収束定理から $\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_{\tau_n}] = \mathrm{E}[X_\tau]$ を導くことで従う．σ, τ が有界な停止時であるとき，適切に停止した擬マルチンゲールはクラス (L.D.) になるため，この場合はクラス (L.D.) であることを前面に出さずとも系として従う． □

3　Doob の不等式

ここでは擬似マルチンゲールを考える．このとき Doléans-Dade 前測度 λ_X は各 $(0,t]\times\Omega$ 上で有界変動である．このとき，Jordan 分解が存在する (Dunford and Schwartz, 1958, Theorem III.1.8)

$$\lambda_X(A)=\lambda_X^+(A)-\lambda_X^-(A),\qquad |\lambda_X|(A):=\lambda_X^+(A)+\lambda_X^-(A),$$
$$\lambda_X^+(A):=\sup_{B\subset A}\lambda_X(B),\qquad \lambda_X^-(A):=-\inf_{B\subset A}\lambda_X(B).$$

命題 3.1． $I\subset[0,\infty]$ を可算集合で，$a:=\inf I, b:=\sup I$ としたとき $b\in I$ を満たすとする．このとき，任意の擬似マルチンゲール $(X_t)_{t\in I}$ について，次が成り立つ：

$$\alpha\,\mathrm{P}\left[\sup_{t\in I}X_t>\alpha\right]\leqslant\lambda_X^-((a,b]\times\Omega)+\mathrm{E}\left[1_{\{\sup X_t>\alpha\}}X_b\right],\qquad \alpha>0.$$

[証明]． I に至る有限集合の増大列 $\{I_n\}$ を取る：$I_n\nearrow I$．このとき，次が成り立つ：

$$\left\{\sup_{t\in I}X_t>\alpha\right\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\sup_{t\in I_n}X_t>\alpha\right\}.$$

従って，有限の I について示せば，単調収束定理から結論が従う．

そもそも $\sup_{t\in I}X_t>\alpha$ という事象は

$$\tau(\omega):=\inf\{(t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega\mid t\in I,\ X_t(\omega)>\alpha\}$$

という停止時が有限な値を取る $\tau\leqslant b$ という事象に等しい（この τ が停止時になることは I が有限集合であることに因る）．よって

$$\mathrm{P}[\tau\leqslant b]=\mathrm{E}[1_{\{\tau\leqslant b\}}]\leqslant\mathrm{E}\left[1_{\{\tau\leqslant b\}}\frac{X_t}{\alpha}\right].$$

ここで $\mathrm{E}[1_{\{\tau\leqslant b\}}X_\tau]=\mathrm{E}[1_{\{\tau\leqslant b\}}X_b]-\mathrm{E}[(X_b-X_{\tau\wedge b})]$ という変形と任意停止 2.1 を通じて，

$$\mathrm{E}[1_{\{\tau\leqslant b\}}X_\tau]=-\lambda_X((\tau\wedge b,b])+\mathrm{E}[1_{\{\tau\leqslant b\}}X_b].$$

■

注 3.2 (連続版の Doob 不等式への道のり)．X の path の右連続性も，確率基底の通常の条件も必要としていない点に注目．X の代わりに $-X$ を考えることで次も従う：

$$\alpha\,\mathrm{P}\left[\inf_{t\in I}X_t<-\alpha\right]\leqslant\lambda_X^+((a,b]\times\Omega)-\mathrm{E}\left[1_{\{\inf X_t<-\alpha\}}X_b\right],\qquad \alpha>0.$$

2 つの結果を組み合わせ，(X_t) に右連続性も課すと次の結果を得る：

$$\alpha\,\mathrm{P}\left[\sup_{t\in[0,b]}|X_t|>\alpha\right]\leqslant|\lambda_X|((0,b]\times\Omega)+\mathrm{E}\left[1_{\{\sup|X_t|>\alpha\}}|X_b|\right],\qquad \alpha>0.$$

□

4　マルチンゲール収束定理

> At any rate, it is true that in a reasonable sense there are only two qualitative convergence theorems in measure theory, the ergodic theorem and the martingale convergence theorem. (Doob, 1971)

マルチンゲール $\{X_t\}$ の $t\to\infty$ での概収束に関連する結果は，Doob のマルチンゲール収束定理と呼ばれる．Doob (1940) 以来，上渡回数の評価による証明が最も本質的と理解されている．ここでは一般の確率過程について示す．

4.1　上渡回数定理

命題 4.1． $I \subset \mathbb{R}_+$ を可算集合，$\{X_t\} \subset L^1(\Omega)$ を $K := \sup_{t \in I} |\lambda_X|((0,t] \times \Omega) < \infty$ を満たす擬似マルチンゲールであるとする．このとき，$a < b$ を実数，$I_n \nearrow I$ を有限集合の増大列として，

$$N^I_{[a,b]} := \sup_{n \in \mathbb{N}} N^{I_n}_{[a,b]}, \qquad N^{I_n}_{[a,b]} := \{\{X_t\}_{t \in I_n} \text{ が } [a,b] \text{ を下から上に横断した回数 }\},$$

と定めると，次が成り立つ：

$$\mathrm{E}[N^I_{[a,b]}] \leqslant \frac{K + \sup \mathrm{E}[(X_t - a)^-]}{b-a}.$$

ただし $x_- := -\min\{x, 0\}$ とした．

[証明]． 有限集合 I について示せば，一般の可算集合 I についても単調収束定理により従う．そこで $I = \{t_0 < \cdots < t_n\}$ と表す．a または b を通過する停止時

$$\begin{aligned}
\tau_{2j+1} &:= \inf\{t \in I \mid t \geqslant \tau_{2j},\ X_t < a\} \wedge t_n, \\
\tau_{2j+2} &:= \inf\{t \in I \mid t \geqslant \tau_{2j+1},\ X_t > b\} \wedge t_n, \qquad j = 0, 1, \cdots, n-1,
\end{aligned}$$

に注目すれば，任意停止定理 2.1 から

$$\sum_{j=1}^n \mathrm{E}[X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}}] = \sum_{j=1}^n \lambda_X([\tau_{2j-1}, \tau_{2j})) \leqslant |\lambda|_X((0,t_n]) \leqslant K.$$

この事実を次の不等式に使えば良い：

$$(b-a)N^I_{[a,b]} - (a - X_{t_n})_+ \leqslant \sum_{j=1}^n (X_{\tau_{2j}} - X_{\tau_{2j-1}}).$$

■

系 4.2． 追加で $\sup_{t \in I} \mathrm{E}[X_t^-] < \infty$ を満たすとする．このとき，ある測度 1 の部分集合 $\Omega_0 \subset \Omega$ が存在して，任意の単調部分列 $\{t_n\} \subset I$ について，

$$\lim_{n \to \infty} X_{t_n}(\omega) \in [-\infty, \infty], \qquad \omega \in \Omega_0.$$

[証明]． 追加の仮定により任意の $a < b \in \mathbb{R}$ について $\mathrm{E}[N^I_{[a,b]}] < \infty$ がわかる．これにより

$$\Omega_0 := \bigcup_{\substack{a,b \in \mathbb{Q} \\ a<b}} \left\{ N^I_{[a,b]} < \infty \right\}$$

は測度 1 の可測集合になる．任意の単調列 $\{t_n\} \subset I$ を取り，$X_{t_n}(\omega)$ が $\omega \in \Omega_0$ なのに $[-\infty, \infty]$ 上でさえ収束しないと仮定して矛盾を導く．このとき

$$\liminf_{n \to \infty} X_{t_n}(\omega) < \limsup_{n \to \infty} X_{t_n}(\omega)$$

が成り立つということであるが，この間に挟まる $a < b \in \mathbb{Q}$ が取れてしまい，上渡回数が発散する必要が出てしまう．■

4.2　概収束

命題 4.3． $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ を可積分過程で

$$\text{(UI)} \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_X|((0,n] \times \Omega) < \infty, \qquad \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{E}[X_n^-] < \infty,$$

を満たすとする．このとき，ある $X_\infty \in L^1(\Omega)$ が存在して，$X_n \to X_\infty$ a.s. が成り立ち，

$$\mathrm{E}[|X_\infty|] \leqslant \liminf_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{E}[|X_n|] < \infty.$$

[証明]. (UI) により，$X_\infty := \lim_{n\to\infty} X_n \in [-\infty, \infty]$ が測度 1 を持つ可測集合上で定まる．あとは $X_\infty \in L^1(\Omega)$ を示せば良い．

$$|\mathrm{E}[X_n - X_0]| = |\lambda_X((0,n] \times \Omega)| \leqslant \sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_X|((0,n] \times \Omega) < \infty$$

により $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\mathrm{E}[X_n]| < \infty$ であるため，(UI) の 2 つ目の条件と併せて $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[|X_n|] < \infty$ である．Fatou の補題から結論が従う． ■

注 4.4 (一般化への道のり)**.** 命題では離散時間で考えたので，(UI) の最初の条件は

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_X|((0,n] \times \Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}[|X_n - X_{n-1}|] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[\left|\mathrm{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1}\right|\right] < \infty$$

と同値になる．最後の等式は $\{X_n - X_{n-1} > 0\} = \{\mathrm{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - X_{n-1} > 0\}$ という事象とその補集合上で場合分けすることで確認できる．$\{X_n\}$ が劣マルチンゲールであるとき，条件 (UI) はちょうど $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[|X_n|] < \infty$ と同値になる．優マルチンゲールであるときは 2 つ目の条件が 1 つ目を含意する．càdlàg 擬似マルチンゲール $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ については条件 (UI) の n を t に置き換えてそのまま成り立つ． □

参考文献

C. Doléans-Dade. Existence du Processus Croissant Naturel Associéàun Potentiel de la Classe (D). *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 9(4):309–314, 1968.

C. Doléans-Dade and P.-A. Meyer. Intégrales Stochastiques par Rapport aux Martingales Locales. *Séminaire de probabilités*, 4:77–107, 1970.

J. L. Doob. Regularity Properties of Certain Families of Chance Variables. *Transactions of the American Mathematical Society*, 47(3):455–486, 1940.

J. L. Doob. What is a Martingale? *The American Mathematical Monthly*, 78(5):451–463, 1971.

N. Dunford and J. T. Schwartz. *Linear Operators. Part 1: General Theory*, volume VII of *Pure and Applied Mathematics*. Interscience Publishers, 1958. ISBN 9780471608486.

D. L. Fisk. Quasi-martingales. *Transactions of the American Mathematical Society*, 120:369–389, 1965.

D. P. Giesy. A Finite-Valued Finitely Additive Unbounded Measure. *The American Mathematical Monthly*, 77(5):508–510, 1970.

P. A. Meyer. A Decomposition Theorem for Supermartingales. *Illinois Journal of Mathematics*, 6(2):193 – 205, 1962.

P.-A. Meyer. *Probabilités et Potentiel*, volume 14 of *Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg*. Paris, Hermann, 1966.

P.-A. Meyer. Intégrales Stochastiques II. *Séminaire de probabilités*, 1:95–117, 1967.

M. Métivier. *Semimartingales: A Course on Stochatic Processes*, volume 2 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. De Gruyter, 1982.

J. L. Snell. Applications of Martingale System Theorems. *Transactions of the American Mathematical Society*, 73(2):293–312, 1952. ISSN 00029947.