2023 年経験過程ゼミ
講義ノート第 5.1 節 数学的準備

司馬博文

2023 年 11 月 7 日

目次

記法.

(1) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ で確率空間を表すとする．その上の可測関数の全体を $L(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ で表す.

(2) $[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$ で自然数の集合を表す.

(3) $B(x, r) := \{y \in X \mid \|x - y\| \leqslant r\}$ で閉球，$U(x, r) := B(x, r)^\circ$ で開球を表す.

1 距離空間

1.1 定義と例

定義 1.1 (**pseudometric**)**.** 集合 D 上の関数 $d : D \times D \to \mathbb{R}_+$ が**擬距離**であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう：

(1) 非負性：$d(\Delta) = \{0\}$.[†1]

(2) 対称性：

$$d(x,y) = d(y,x), \qquad x,y \in D.$$

(3) 三角不等式：

$$d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z), \qquad x,y,z \in D.$$

d が**距離**であるとは，さらに

(4) 忠実性：

$$d(x,y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = y, \qquad x,y \in D,$$

を満たすことをいう．

注意. (1) を「非負性」と呼ぶのは不自然に見えるが，(2),(3) と併せれば

$$0 = d(x,x) \leqslant d(x,y) + d(y,x) \quad \Rightarrow \quad d(x,y) \geqslant 0,$$

を含意することが判る．だから (1) の条件で十分なのである． ■

距離空間の重要な例に，ノルムが定める距離空間がある．一般に「ノルム空間」と言ったときは，線型空間を仮定していることに注意.

定義 1.2 (**seminorm, norm**)**.** D を実線型空間とする．この上の関数 $\|-\| : D \to \mathbb{R}_+$ が**半ノルム**であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう：

(1) 非負性：

$$\|x\| \geqslant 0, \qquad x \in D.$$

(2) 斉次性：

$$\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, x \in D.$$

(3) 劣加法性・三角不等式：

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|, \qquad x,y \in D.$$

半ノルムがさらに

(4) 忠実性：

$$\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, \qquad x \in D,$$

も満たすとき，これを単に**ノルム**という．

注意. 実は (1) は冗長であり，本質的に 2 条件である．(2) と線型空間の公理から $\|\mathbf{0}\| = |0|\|\mathbf{0}\| = 0$ が判り，これと (3) を併せると，

$$0 = \|\mathbf{0}\| = \|x - x\| \leqslant 2\|x\|.$$

■

補題 1.3 (**ノルム空間は距離空間**)**.** $(D, \|-\|)$ を半ノルム空間とする．このとき，

$$d(x,y) := \|x - y\|, \qquad x,y \in D,$$

について擬距離空間を定める．

[†1] $\Delta := \{(x,y) \in D \times D \mid x = y\}$ は対角集合 (diagonal set) という．D が Hausdorff であることと Δ が閉集合であることは同値．よって距離空間は Hausdorff であることが判る．

[証明]. d が次の 3 条件を満たすためである．

(1) ノルムの斉次性 (2) より，$d(x,x)=\|x-x\|=\|\mathbf{0}\|=0\cdot\|\mathbf{0}\|=0$.
(2) ノルムの斉次性 (2) より，$d(x,y)=\|x-y\|=\|(-1)(y-x)\|=|-1|\|y-x\|=d(y,x)$.
(3) ノルムの劣加法性 (3) より，

$$d(x,z)=\|x-z\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|=d(x,y)+d(y,z).$$

この証明ではノルムの定義 (1) を使っていないことも，この条件が冗長であることを示唆している． ■

1.2　位相的性質

距離空間においてコンパクト性は「完備かつ有界」であることに同値になる．無限次元ノルム空間で集合は滅多にコンパクトにならない．

定義 1.4 (**separable, totally bounded, compact**). 距離空間 D について，

(1) D が**可分**であるとは，可算な稠密部分集合 $D_0\subset D$ が存在することをいう：$\overline{D_0}=D$.
(2) D が**全有界**であるとは，任意の $\epsilon>0$ に対して，ある $N\in\mathbb{N}$ と $\{x_i\}_{i=1}^N\subset D$ が存在して，$D\subset\bigcup_{i=1}^N U(x_i,\epsilon)$ を満たすことをいう．
(3) D が**コンパクト**であるとは，任意の開被覆 $D\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ $(U_i\overset{\text{open}}{\subset}D)$ に対して，ある有限部分集合 $J\overset{\text{finite}}{\subset}I$ が存在して，$D\subset\bigcup_{i\in J}U_i$ を満たすことをいう．

注 1.5 (閉包について). 一般の位相空間 X の部分集合 $A\subset X$ において，閉包 $\overline{A}$ は次のように定義される：

(1) $x\in X$ が A の**触点** (adherent point) であるとは，任意の開近傍 $x\in U\overset{\text{open}}{\subset}X$ に対して，$U\cap A\neq\varnothing$ が成り立つことをいう．
(2) A の触点全体の集合を $\overline{A}$ で表す．

このとき，

$$\overline{A}=\bigcap\left\{F\overset{\text{finite}}{\subset}X\mid A\subset F\right\}$$

も成り立つ．すなわち，A を含む最小の閉集合として $\overline{A}$ は特徴付けられる．しかし，X が距離空間でもある場合，次が成り立つ：

定義 1.6 (ϵ**-covering number,** ϵ**-metric entropy,** ϵ**-packing number**). (T,d) を擬距離空間とする．

(1) 正数 $\epsilon>0$ について，ϵ-**被覆数**とは，

$$N(T,d;\epsilon):=\min\left\{n\in\mathbb{N}\;\middle|\;\exists_{t_1,\cdots,t_n\in T}\;T\subset\bigcup_{i=1}^n B_\epsilon(t_i)\right\},\qquad\epsilon>0,$$

をいう．ただし，$\min\varnothing=\infty$ と約束する．
(2) N の対数 $\log N(T,d;\epsilon)$ を ϵ-**計量エントロピー**という．
(3) 正数 $\epsilon>0$ について，ϵ-**充填数**とは，

$$D(T,d;\epsilon):=\max\left\{n\in\mathbb{N}\;\middle|\;\exists_{t_1,\cdots,t_n\in T}\;\min_{i,j\in[n]}d(t_i,t_j)>\epsilon\right\},\qquad\epsilon>0,$$

をいう．

補題 1.7 (**被覆数と充填数の等価性**). (T,d) を擬距離空間とする．

(1) 任意の $\epsilon>0$ について，

$$N(T,d;\epsilon)\leqslant D(T,d;\epsilon)\leqslant N(T,d;\epsilon/2).$$

(2) 次は同値：
   (i) T は全有界である．
   (ii) 任意の $\epsilon > 0$ について，ϵ-被覆数 $N(T, d; \epsilon)$ は有限．
   (iii) 任意の $\epsilon > 0$ について，ϵ-充填数 $D(T, d; \epsilon)$ は有限．

[証明].

(1) 任意の $\epsilon > 0$ を取る．
   (i) $D := D(T, d; \epsilon)$ 個の点 $\{t_1, \cdots, t_D\} \subset T$ が存在して，$\min_{i,j \in [D]} d(t_i, t_j) > \epsilon$ を満たし，さらに任意の $t \in T$ に対して，ある $i \in [D]$ が存在して，$d(t, t_i) \leqslant \epsilon$ を満たす．これは $t \in B_\epsilon(t_i)$ を意味するから，$\{B_\epsilon(t_i)\}_{i=1}^D$ が T を被覆していることがわかる．よって，$N(T, d; \epsilon) \leqslant D = D(T, d; \epsilon)$．
   (ii) 仮に $D := D(T, d; \epsilon) > N(T, d; \epsilon/2) =: N$ とすると，大きさ D の充填 $\{t_i\}_{i=1}^D$ と大きさ N の被覆 $\{B_{\epsilon/2}(s_i)\}_{i=1}^N$ とが同時に存在する．しかし $D > N$ であるから，ある $B_{\epsilon/2}(s_i)$ が存在して，$|\{t_i\}_{i=1}^D \cap B_{\epsilon/2}(s_i)| \geqslant 2$．これは，$\{t_i\}_{i=1}^D$ のうちある 2 点間の距離は ϵ 以下になっているということだから，$\{t_i\}_{i=1}^D$ が充填であることに矛盾．

(2) (2)⇔(3) は (1) からわかる．
   (1)⇒(2) 任意の $\epsilon > 0$ について，被覆 $\{U_\epsilon(t_i)\}_{i=1}^N$ が存在する．このとき，$\{B_\epsilon(t_i)\}_{i=1}^N$ も被覆である．
   (2)⇒(1) 任意の $\epsilon > 0$ について，被覆 $\{B_{\epsilon/2}(t_i)\}_{i=1}^N$ が存在し，このとき $\{U_\epsilon(t_i)\}_{i=1}^N$ も被覆である．

■

補題 1.8 (全有界ならば可分). D を擬距離空間とする．D が全有界ならば，可分である．

[証明].

Step1 次のようにして，可算な稠密部分集合 $D_0 \subset D$ が構成できる．まず，D は全有界だから，任意の $n \in \mathbb{N}^+$ に対して，ある開球の組 $\{U(x_i^{(n)}, 1/n)\}_{i=1}^{N_n}$ が存在して，$D = \bigcup_{i=1}^{N_n} U(x_i^{(n)}, 1/n)$ を満たす．これに対して，$D_0 := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{N_n} \{x_i^{(n)}\}$ と定めれば良い．たしかに可算である．

Step2 D_0 の D 上での稠密性 $\overline{D_0} = D$ は次のようにして示せる．擬距離空間では，開球は開集合の基底をなすから，任意の $x \in X$ と $\epsilon > 0$ に対して，$D_0 \cap U(x, \epsilon) \neq \varnothing$ を示せば良い．まず，ある $n \geqslant 1$ が存在して $\frac{1}{n} < \epsilon$ を満たす．この $n \geqslant 1$ に対しても $x \in D = \bigcup_{i=1}^{N_n} U(x_i^{(n)}, 1/n)$ であったから，ある $i \in [N_n]$ が存在して $x \in U(x_i^{(n)}, 1/n)$ であることが従うが，これは

$$|x - x_i^{(n)}| < \frac{1}{n} < \epsilon$$

を意味する．すなわち，$x_i^{(n)} \in D_0 \cap U(x, \epsilon) \neq \varnothing$．

■

定理 1.9 (コンパクト距離空間の特徴付け). D を距離空間，$A \subset D$ を部分集合とする．次は同値：

(1) A はコンパクト．
(2) A は点列コンパクト：A の任意の点列は A の点に収束する部分列を持つ．
(3) A は完備かつ全有界．

[証明]. †2

(1)⇒(2) 任意の点列 $\{x_n\} \subset X$ を取る．これに対し $A := \left\{(x_n, n) \in X \times \widetilde{\mathbb{N}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ と定め，ある $a \in X$ に対して $(a, \infty) \in \overline{A}$ を示せば良い．X がコンパクトであるとき，$\mathrm{pr}_2 : X \times \widetilde{\mathbb{N}} \to \widetilde{\mathbb{N}}$ は閉写像（付録 B.2）だから，$\mathbb{N} \subset \mathrm{pr}_2(\overline{A}) \subset \widetilde{\mathbb{N}}$ と併せると $\mathrm{pr}_2(\overline{A}) = \widetilde{\mathbb{N}}$ が必要．

(2)⇒(3)

†2 [斎藤毅, 2009] 定理 8.3.5 p.205.

(i) 完備であることを示すために，任意に Cauchy 列 $\{x_n\}\subset X$ を取る．点列コンパクト性より収束する部分列 $\{x_{m_n}\}\subset\{x_n\}$ が取れるが，このとき Cauchy 列 $\{x_n\}$ 自身も同じ収束先 $a:=\lim_{n\to\infty}x_{m_n}$ へ収束する必要がある．実際，任意の $n,n'\in\mathbb{N}$ について

$$d(x_n,a)\leqslant d(x_n,x_{n'})+d(x_{n'},a),\qquad n,n'\in\mathbb{N},$$

であるが，右辺第 1 項の上限を最初に取り，次に左辺，最後に右辺第 2 項の下限を取ることで，

$$\sup_{n\geqslant m}d(x_n,a)\leqslant\sup_{n,n'\geqslant m}d(x_n,x_{n'})+\inf_{n'\geqslant m}d(x_{n'},a),\qquad m\in\mathbb{N},$$

が成り立つ．$m\to\infty$ の極限を考えることで，右辺は 0 に近づくから，$x_n\to a$ が得られる．

(ii) X が全有界でないならば，X は点列コンパクトでないことを示す．すると，ある実数 $r>0$ が存在して，任意の有限部分集合 $A\overset{\text{finite}}{\subset}X$ に対して $\bigcup_{a\in A}U_r(a)\subsetneq X$ が成り立つ．これを用いて，（選択公理から）次のように点列 $\{x_n\}\subset X$ を構成できる：

$$x_0\in X\neq\varnothing,\qquad x_{n+1}\in X\setminus\left(\bigcup_{i=0}^{n}U_r(x_i)\right)\neq\varnothing,\quad n\geqslant 1.$$

このとき，$\{x_n\}\subset X$ のどの 2 点も互いに $r>0$ だけ離れているから，いかなる部分列も収束しない．

(3)⟹(1)

(i) X は全有界だから，任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して，$X\subset\bigcup_{a\in A_n}U_{1/2^n}(a)$ を満たす有限部分集合 $A_n\overset{\text{finite}}{\subset}X$ が存在する．これに対して，$A:=\prod_{n\in\mathbb{N}}A_n$ と定めると，Tychonoff の定理よりコンパクトである．このうち Cauchy 列からなる部分空間を

$$C:=\left\{(a_n)\in A\;\middle|\;\forall_{n\in\mathbb{N}}\,d(a_n,a_{n+1})\leqslant\frac{3}{2^{n+1}}\right\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left\{(a_m)\in A\;\middle|\;d(a_n,a_{n+1})\leqslant\frac{3}{2^{n+1}}\right\}$$

と定めると，射影の積 $(\mathrm{pr}_n,\mathrm{pr}_{n+1}):A\to A_n\times A_{n+1}$ の連続性から C は閉集合の積より閉，従ってやはりコンパクトである．

(ii) 次の Cauchy 列をその収束先に写す写像

$$\begin{array}{ccc} l:C & \longrightarrow & X \\ \uplus & & \uplus \\ (a_n) & \longmapsto & \lim_{n\to\infty}a_n \end{array}$$

が連続全射であることを示せば，X のコンパクト性が従う付録 B.3．なお，C の元 $(a_n)\in C$ は，任意の自然数 $n\leqslant m$ について

$$d(a_n,a_m)\leqslant d(a_n,a_{n+1})+\cdots+d_{a_{m-1},a_m}\leqslant\frac{3}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{3}{2^m}\leqslant\frac{3}{2^n},\qquad n\leqslant m,$$

を満たすため，たしかに Cauchy 列である．

(a) 任意の $x\in X$ を取り，$l^{-1}(x)$ の元を構成する．A の定義と選択公理から，$d(a_n,x)<\dfrac{1}{2^n}$ を満たす点列 $(a_n)\in\prod_{n\in\mathbb{N}}(A_n\cap U_{1/2^n}(x))\subset A$ が取れる．これは

$$d(a_n,a_{n+1})\leqslant d(a_n,x)+d(x,a_{n+1})<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{3}{2^{n+1}}$$

を満たすから，たしかに $(a_n)\in C$ も満たし，$l(a)=\lim_{n\to\infty}a_n=x$ も成立．

(b) 任意の $l(a)\in X$ と $r>0$ を取り，$l^{-1}(U_r(l(a)))$ に含まれる $a\in C$ の開近傍を構成する．いま $d(a_n,l(a))\leqslant\dfrac{3}{2^n}$ $(n\in\mathbb{N})$ が成り立つことを利用して，$m\in\mathbb{N}$ を $\dfrac{6}{2^m}<r$ を満たすように定める．すると，任意の $d(a_m,b_m)<r-\dfrac{6}{2^m}$ を満たす $(a_m),(b_m)\in C$ について

$$d(l(a),l(b))\leqslant d(a_m,l(a))+d(a_m,b_m)+d(l(b),b_m)<r$$

が成り立つ．すなわち，$\mathrm{pr}_m^{-1}(U_{r-6/2^m}(a_m))\subset l^{-1}(U_r(l(a)))$ が成立．

■

系 1.10 (相対コンパクト性の特徴付け). D を距離空間，$A \subset D$ を部分集合とする．次は同値：

(1) A は相対コンパクトである．
(2) A は相対点列コンパクトである：A の任意の点列は収束部分列を持つ．
(3) A は全有界で，$\overline{A}$ は完備である．

特に，D が完備であるとき，全有界性と相対コンパクト性とは同値．

[証明]. 次の 2 点を示せば，残りは定理から従う．

(a) A が相対点列コンパクトであることと，$\overline{A}$ が点列コンパクトであることとは同値．
(b) A が全有界であることと，$\overline{A}$ が全有界であることとは同値．

(b) は次の補題のように，一般化した形で示せる．

(i) (a) を示す．任意の点列 $\{x_n\} \subset \overline{A}$ を取る．$x_n \in A$ i.o. ならば，A の列でもある部分列 $\{x_{m_n}\} \subset \{x_n\}$ が取れる．A は相対コンパクトであるから，収束する部分列 $\{x_{m_r}\} \subset \{x_{m_n}\}$ が取れる．その収束先は $\overline{A}$ の点である．

(ii) 一方で $x_n \in \partial A$ f.e. の場合について示す．∂A 内の部分列を $\{x_n\} \subset \partial A$ と取り直す．すると各 $x_n \in \partial A$ について，これに収束する A の列 $\{y^{(n)}_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset A$ が取れる．この各 $n \in \mathbb{N}$ について，$d(x_n, y^{(n)}_{m(n)}) < \dfrac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ を満たす $\{m(n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ を取り，A の列 $\{y^{(n)}_{m(n)}\} \subset A$ に注目すると，A の相対点列コンパクト性の仮定から，ある $y \in \overline{A}$ に収束する部分列 $\{y^{(r(n))}_{m(r(n))}\} \subset \{y^{(n)}_{m(n)}\}$ が取れる．このとき，$x_{r(n)} \to y$ が成立することが示せる．実際，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して

$$d(y, y^{(r(n))}_{m(r(n))}) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad n \geqslant N,$$

が成り立つから，必要なら $\dfrac{1}{N} < \dfrac{\epsilon}{2}$ も満たすように大きく取り直せば，

$$d(x_{r(n)}, y) \leqslant d(x_{r(n)}, y^{(r(N))}_{m(r(N))}) + d(y^{(r(N))}_{m(r(N))}, y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{r(n)} < \epsilon, \qquad n \geqslant N.$$

■

補題 1.11 (全有界性の稠密部分集合への遺伝). X を距離空間とする．

(1) 稠密部分集合 $A \subset X$ について，次は同値：
  (i) A は全有界．
  (ii) X は全有界．
(2) X を全有界な距離空間とする．完備化 $\overline{X}$ はコンパクトである．

[証明].

(i) (1)⇒(2)　任意の $\epsilon > 0$ を取ると，ある有限部分集合 $A_0 := \{a_i\}_{i=1}^n \subset A$ が存在して，$\forall_{a\in A}\ d(a, A_0) < \dfrac{\epsilon}{2}$．実はこのとき開球 $\{U_\epsilon(a_i)\}_{i\in[n]}$ は X も被覆している．実際，$\overline{A} = X$ より，任意の $x \in X$ に対して，$A \cap U_{\epsilon/2}(x) \neq \varnothing$ すなわち，ある $a \in A$ が存在して，$d(a, x) < \dfrac{\epsilon}{2}$．すると，任意の $x \in X$ について，最も近い A_0 の元との距離が $\epsilon > 0$ よりも小さいということだから，開球の有限族 $\{U_\epsilon(a_i)\}_{i=1}^n$ は X を被覆している．

(2)⇒(1)　任意の $\epsilon > 0$ を取ると，X の全有界性より，ある有限部分集合 $X_0 := \{x_i\}_{i\in[n]} \subset X$ が存在して，

$$d(x, X_0) < \frac{\epsilon}{2}, \qquad x \in X.$$

任意の $x_i \in X_0$ について，$a_i \in A \cap U_{\epsilon/2}(x_i) \neq \varnothing$ を取ると，$U_{\epsilon/2}(x_i) \subset U_\epsilon(a_i)$．よって，$\{U_\epsilon(a_i)\}_{i\in[n]}$ は X を被覆し，特に A も被覆する．

(ii) $X \subset \overline{X}$ は稠密部分集合である．これが全有界ならば $\overline{X}$ も全有界．

■

Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ では，$A \subset \mathbb{R}^n$ が有界閉集合であることとコンパクトであることとは同値．一般の位相線型空間で，このように簡単なコンパクト集合の特徴付けは期待できない．証明のストーリーは同じなので，次の命題は（一般の位相線型空間についてではなく）ノルム空間について示す．

命題 1.12 (ノルム空間が有限次元になる条件). $(X, \|-\|)$ をノルム空間とすると，単位閉球 $B := \{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$ について，次は同値：

(1) B はコンパクトである．
(2) X は有限次元である．

[証明]. [†3] D が有限次元であるとき，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して，$D \simeq_{\mathrm{Top}} \mathbb{F}^n$ $(\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$．$\mathbb{F}^n$ にて，単位閉球は有界閉集合であるからコンパクトである．あとは (1)⇒(2) を示せば良い．B がコンパクトであるとすると，B は半径 $1/2$ の開球を有限個だけで被覆できる：

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{m} \left(x_i + \frac{1}{2} B^\circ \right), \qquad x_1, \cdots, x_m \in B.$$

有限次元部分空間 $Y := \langle x_1, \cdots, x_m \rangle$ に注目すると，$B^\circ \subset Y + \frac{1}{2} B^\circ$ の両辺を 2 で割って，$\frac{1}{2} B^\circ \subset Y + \frac{1}{4} B^\circ$．これを繰り返して，

$$B^\circ \subset Y + \frac{1}{2} B^\circ \subset Y + \frac{1}{4} B^\circ \subset Y + \frac{1}{8} B^\circ \subset \cdots.$$

すなわち，

$$B^\circ \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(Y + \frac{1}{2^n} B^\circ \right) = \overline{Y} = Y.$$

すると任意の $k \in \mathbb{N}$ について $kB^\circ \subset Y$ が必要であるが，左辺は X の全体を走るから，結局 $X = Y$．特に X は有限次元である．■

1.3　Polish 空間上の確率測度はタイト

定理 1.13 ([Oxtoby and Ulam, 1939]). 距離空間 X は完備可分とする．X 上の任意の Borel 確率測度 $\mathrm{P} \in P(X)$ は緊密である．すなわち，任意の $\epsilon > 0$ に対して，あるコンパクト集合 $K \overset{\mathrm{cpt}}{\subset} X$ が存在して，$\mathrm{P}[K] > 1 - \epsilon$.

[証明].

Step1　S は可分だから，可算な稠密部分集合 $S_0 \subset S$ が取れる．これらを中心とすることで，任意の $k \in \mathbb{N}^+$ に対して，半径 $1/k$ の開球の可算族 $\{U_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ であって S を被覆するものが取れる．

Step2　任意の $\epsilon > 0$ と $k \in \mathbb{N}^+$ に対して，ある $n_k \in \mathbb{N}$ が存在して，

$$\mathrm{P}\left[\bigcup_{i=1}^{n_k} U_i^{(k)} \right] > 1 - \frac{\epsilon}{2^k}.$$

これに対して，

$$A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}^+} \bigcup_{i=1}^{n_k} U_i^{(k)}.$$

と定めると，

$$\mathrm{P}[S \backslash A] = \mathrm{P}\left[\bigcup_{k \in \mathbb{N}^+} \left(S \backslash \bigcup_{i=1}^{n_k} U_i^{(k)} \right) \right] < \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.$$

より，$\mathrm{P}[A] > 1 - \epsilon$ を満たす．

Step3　A は構成の仕方から明らかに S の全有界な部分集合である．S は完備としたから，その閉包 $\overline{A}$ は S 上で再び完備である．以上を併せると $\overline{A}$ はコンパクト．その上 $\mathrm{P}[\overline{A}] > 1 - \epsilon$ は満たし続ける．

■

[†3] [Rudin, 1991] 定理 1.22 p.17 が極めて一般的な場合について示している．

1.4　ノルム空間の例

最後に，最も重要な 2 つの Banach 空間を考察して終わる．

命題 1.14 (有界関数の空間は決して可分でない). Banach 空間 $l^\infty(T)$ について，次は同値：

(1) $l^\infty(T)$ は可分．
(2) T は有限集合．

[証明]. (2)⇒(1) は明らかだから，(1)⇒(2) を示す．T が仮に単射 $n:\mathbb{N}\to T$ を持つとして，矛盾を導く．実はこの仮定の下で，任意の $I\in P(\mathbb{N})$ について $l^\infty(T)$ の元を

$$e_I(t) := \begin{cases} 1 & t\in I, \\ 0 & t\in T\backslash I. \end{cases}$$

と定めると，各 $\{e_I\}_{I\in P(\mathbb{N})}\subset l^\infty(T)$ は距離が 1 ずつ離れている．よって，任意の $l^\infty(T)$ の稠密部分集合は，各開球 $\{B(e_I,1/2)\}_{I\in P(\mathbb{N})}$ と空でない共通部分を持つから，少なくとも連続体濃度であることが必要になる．■

命題 1.15 ($C_u(T)$ の定義). 擬距離空間 (T,d) 上の空間

$$C_u(T) := \left\{f\in C_b(T)\mid f \text{ は一様連続}\right\}$$

は Banach 空間である．

[証明]. $C_u(X)\hookrightarrow C_b(X)$ が閉埋め込みであることを示せば良い．任意の $f\in\overline{C_u(X)}$ を取ると，これに一様収束する一様連続関数の列 $\{f_n\}\subset C_u(X)$ が存在するが，一様連続関数の一様収束極限はやはり一様収束であるから，$f\in C_u(X)$ である．

任意に $\epsilon>0$ を取る．一様収束極限であるから，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，

$$\|f_n(x)-f(x)\|_\infty < \frac{\epsilon}{3}, \qquad n\geqslant N.$$

ここで $n\geqslant N$ を適当に定める．$f_n\in C_u(X)$ より，ある $\delta>0$ が存在して，

$$|x-y|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f_n(x)-f_n(y)|<\frac{\epsilon}{3}.$$

以上を総じて，

$$|x-y|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-f(y)|<\epsilon.$$

■

定理 1.16 ($C_u(T)$ が可分になるとき). 距離空間 (T,d) 上の Banach 空間 $C_u(T)$ について，次は同値：

(1) $C_u(T)$ は可分．
(2) (T,d) は全有界．

このとき，T の完備化 $\overline{T}$ はコンパクトで，同型 $C_u(T)\simeq_{\mathrm{Ban}} C_b(\overline{T})$ が成り立つ．

[証明].

(1)⇒(2)

Step1　T を全有界でないとすると，ある $\epsilon>0$ が存在して，ある T の ϵ-開球の列 $\{U_\epsilon(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は互いに素である．

証. 仮に条件を満たすものが取れないとすると，ある $N\in\mathbb{N}$ が存在して，$T\backslash\cup_{n=0}^N U_\epsilon(x_n)$ からは如何なる ϵ-開球も取れない．これは，任意の $x\in T\backslash\cup_{n=0}^\infty U_\epsilon(x_n)$ に対して，ある $k\in n+1$ が存在して，

$$d(x,x_k)<2\epsilon,$$

を満たすことを含意する．よって，$\{U_{2\epsilon}(x_n)\}_{n=0}^N$ は T を被覆しており，T の全有界性に矛盾する．□

Step2　Banach 空間の埋め込み $l^\infty(\mathbb{N})\hookrightarrow C_u(T)$ が存在する．

証．例えば

$$f_n(x) := \left(1 - \frac{d(x, x_n)}{\epsilon}\right) \vee 0$$

と定めることより，ある $\{f_n\} \subset C_u(T; [0,1])$ が存在して，

$$f_n(x_n) = 1, \quad f_n|_{T \setminus U_\epsilon(x_n)} = 0,$$

を満たすものが存在する．これに対して，写像を

$$\begin{array}{ccc} l^\infty(\mathbb{N}) & \longrightarrow & C_u(T) \\ \Psi & & \Psi \\ a_n & \longmapsto & \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f_n \end{array}$$

で定める．これは

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n f_n(t)\right| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n |f_n(t)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n, \qquad t \in T,$$

と評価出来るから well-defined であり，有界線型作用素であることもわかる．これはノルムを保つから，等長写像であり，Banach 空間の埋め込みでもあることが従う． □

Step3　$\mathbb{N}$ が無限集合であることより，$l^\infty(\mathbb{N})$ は可分でない 1.14．よって，矛盾．

(2)⇒(1)　(T, d) は全有界であるから，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，T を被覆する半径 $1/n$ の開球の有限族 $\{U_k^{(n)}\}_{k\in[N_n]}$ が取れる．T は特に正規であるから，これに属する 1 の分割 $\{f_k^{(n)}\}_{k\in[N_n]} \subset C_c(T; [0,1])$ が取れる．これらはコンパクト台を持つから，特に一様連続であることに注意．このとき，

$$\mathcal{F} := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \bigoplus_{k=1}^{N_n} \mathbb{Q} f_k^{(n)} \subset C_c(T) \subset C_u(T)$$

は可算族で，$C_u(T)$ 上稠密である．実際，任意の $f \in C_u(T)$ と任意の $\epsilon > 0$ を取ったとすると，このとき，ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|x - y| < \frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

を満たす．この $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\left|\sup_{x\in U_k^{(n)}} f(x) - q_k\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

を満たす $q_k \in \mathbb{Q}$ を取れば，各 $U_k^{(n)}$ 上で $q_k f_k^{(n)}$ と $f f_k^{(n)}$ とは ϵ より大きく離れることはない．よって，

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{N_n} q_k f_k^{(n)}\right\| \leqslant \sup_{k\in[N_n]} \|f f_k^{(n)} - q_k f_k^{(n)}\|_{U_k^{(n)}} \leqslant \epsilon.$$

完備化上の有界連続関数の空間と同型である　補題から $C_u(T) \simeq_{\mathrm{Ban}} C_u(\overline{T})$ であるが，いま $\overline{T}$ はコンパクトであるから，$C_u(\overline{T}) = C_b(\overline{T}) = C(\overline{T})$.

■

2 確率過程

確率過程は基本的には有限次元周辺分布を指定することで構成できるが，その証明はとんでもなく地道になる．

2.1 定義と同値性

定義 2.1 ((stochastic) process)**.** 集合 T 上の（**確率**）**過程**とは，確率変数の族 $\{X_t\}_{t\in T}\subset L(\Omega)$ をいう．

定理 2.2 (Kolmogorov の定理)**.** T を集合，$\{P_F\}_{F\overset{\text{finite}}{\subset}T}$ を一貫性条件

$$P_G\circ\pi_{GF}^{-1}=P_F,\qquad F\subset G\overset{\text{finite}}{\subset}T,\ \pi_{GF}:\mathbb{R}^{|G|}\twoheadrightarrow\mathbb{R}^{|F|}\text{は射影}$$

を満たす確率測度 $P_F\in P(\mathbb{R}^{|F|})$ の族とする．このとき，積集合 $\mathbb{R}^T$ の積 σ-加法族 $\otimes_{t\in T}\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上に，ただ一つの確率測度 P_T が存在して，$\{P_F\}_{F\overset{\text{finite}}{\subset}T}$ を有限次元周辺分布に持つ．

[証明]. [†4]証明は大まかには次の通り：

(1)
$$\mathcal{A}:=\left\{f_{TF}^{-1}(B)\subset S_T\mid B\in\mathcal{B}_F,F\overset{\text{finite}}{\subset}T\right\}$$
と定めると，これは代数である．

(2) 写像 $P_T:\mathcal{A}\to[0,1]$ を $P_T(f_{TF}^{-1}(B)):=P_F(B)$ で定めると，$\mathcal{A}$ 上で条件を満たす．

(3) P_T は $\mathcal{A}$ 上で可算加法的であるため，Hopf の延長定理より，P_T は確率測度 $P_T:\sigma(A)\to[0,1]$ を定める．

■

定義 2.3 (version, modification / strict version)**.** 添字集合 T を共通とする 2 つの過程 X,Y について，

(1) 有限次元分布族が一致するとき，**異版**または**バージョン**であるという．

(2) 任意の $t\in T$ について $X_t=Y_t$ P-a.s. であるならば，**修正**または**強いバージョン**であるという．

注 2.4 (バージョンとは同分布過程をいう)**.** Kolmogorov の定理より，過程 $\{X_t\}_{t\in T}\subset L(\Omega)$ の有限次元分布が定める $(\mathbb{R}^T,\mathcal{C})$ 上の確率分布 μ が存在する．この μ を X **の法則**といい，$X\sim\mu$ と表すこととすると，**バージョンとは法則が同じ過程**をいう．

命題 2.5 . 可測空間 $(\Omega,\mathcal{A})$ と族 $\{(S_i,\mathcal{S}_i)\}_{i\in I}$ と写像の族 $\{f_i:\Omega\to S_i\}_{i\in I}$ について，積写像 $f:=(f_i):\Omega\to\prod_{i\in I}S_i$ を考える．このとき，次は同値：

(1) f は $\mathcal{A}/\bigotimes_{i\in I}\mathcal{S}_i$-可測.

(2) 各 f_i は $\mathcal{A}/\mathcal{S}_i$-可測.

[証明]. [†5]$\prod_{i\in I}S_i$ 上の（1 次の）円筒集合 $B_i\times\prod_{i\neq j\in I}S_j$ $(B_i\in\mathcal{S}_i)$ の全体は，$\otimes_{i\in I}\mathcal{S}_i$ を σ-生成するので，この円筒集合の逆像が $\mathcal{A}$ に入ることを示せば良いが，これは積写像 $f=(f_i)$ の定義から従う． ■

2.2 Gauss 過程の構成と核関数

「半正定値行列」とは，「全ての固有値が非負な自己共役行列」と特徴付けられる．

まず，「正定値関数」の定義から始める．実は極めてデリケートである．

定義 2.6 (positive semidefinite function)**.** [†6]

(1) 行列 $K:[n]\times[n]\to\mathbb{R}$ が**半正定値**であるとは，任意の<u>複素ベクトル</u> $x\in\mathbb{C}^n$ に対して，

$$(Kx|x)=x^*Kx\geqslant0,\qquad x\in\mathbb{C}^n,$$

[†4] [Dudley, 2002] 定理 12.1.2，[Kallenberg, 2021] 定理 8.23 p.179.

[†5] [Kallenberg, 2021] 補題 1.9 p.15.

[†6] [Aronszajn, 1950] p.344 では E. H. Moore 流の定義と呼んでいる．[Paulsen and Raghupathi, 2016] 定義 2.12 p.24，[Saitoh and Sawano, 2016] 定義 2.1 p.67.

を満たすことをいう．

(2) 関数 $k : E \times E \to \mathbb{C}$ が**半正定値関数**であるとは，任意の関数 $X : E \to \mathbb{C}$ と有限部分集合 $F \overset{\text{finite}}{\subset} E$ とについて

$$\sum_{p,q\in F} \overline{X(p)}X(q)k(p,q) \geqslant 0, \qquad F \overset{\text{finite}}{\subset} E, X \in \mathcal{F}(E),$$

を満たすことをいう．

補題 2.7 . 正定値関数 $K : E \times E \to \mathbb{C}$ は次を満たす：

(1) 非負である：$K(x,x) \geqslant 0$.
(2) 自己共役である：$K(x,y) = \overline{K(y,x)}$.
(3) Cauchy-Schwarz の不等式：$|K(x,y)|^2 \leqslant K(x,x)K(y,y)$.

[証明]. [†7]

(1) $X = 1, F = \{x\}$ と取れば，$K(x,x) \geqslant 0$ が従う．
(2) 任意の $x,y \in E$ について行列 $\begin{pmatrix} K(x,x) & K(x,y) \\ K(y,x) & K(y,y) \end{pmatrix}$ が半正定値であるが，このとき自己共役であることから従う．
(3) 上述の行列の行列式が非負であることから従う．

■

注 2.8. 関数 $k : E \times E \to \mathbb{C}$ が，任意の実関数 $X : E \to \mathbb{R}$ について

$$\sum_{p,q\in F} X(p)X(q)k(p,q) \geqslant 0, \qquad F \overset{\text{finite}}{\subset} E,$$

を満たすのみであったならば，自己共役とは限らない．例えば $E = 2$ としたとき，行列

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

は上述の性質を満たす．

[証明]. 任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ について，

$$(x \; y)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + x^2 + y^2 \geqslant 0.$$

一方で，$(x,y) \in \mathbb{C}^2$ を許すと，

$$(\overline{x} \; \overline{y})\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2|x|^2 + 2|y|^2 + 2x\overline{y}$$

となり，例えば $x = e^{\pi/4}, y = e^{-\pi/4}$ の場合，右辺は実数ではない． ■

系 2.9 (Gauss 過程の構成). T を集合とする．任意の共分散 $\Phi : T \times T \to \mathbb{R}$ と関数 $f : T \to \mathbb{R}$ とについて，ある Gauss 過程 X が存在して次を満たす：

(1) 任意の $t \in T$ について $\mathrm{E}[X_t] = f(t)$.
(2) 任意の $s,t \in T$ について $\mathrm{E}[(X_t - f(t))(X_s - f(s))] = \Phi(s,t)$.

[証明]. [†8]

Step1 有限部分集合 $F \subset T$ について，$\mu_F := \mathrm{N}_{|F|}(f|_F, \Phi|_{F\times F})$ とすると，系 $(\mu_F)_{F\in 2^{(T)}}$ は一貫性条件を満たす．実際，任意の有限部分集合 $F \subset G \subset T$ について，

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{|G|} \arrow[d, "\pi_{GF}"'] & \Omega \arrow[l, "X_G"'] \arrow[dl, "X_F"] \\ \mathbb{R}^{|F|} & \end{tikzcd} \qquad X_F \sim \mu_F, X_G \sim \mu_G.$$

[†7] [Aronszajn, 1950] p.344 (3).
[†8] [Dudley, 2002] 定理 12.1.3 p.443.

という図式は可換であり，$\pi_{GF}(X_G) \sim \mu_F$ が成り立っている．

Step2 Kolmogorov の拡張定理 2.2 から，$(\mathbb{R}^T, \mathcal{C})$ 上の確率測度 μ で，$(\mu_F)_{F \in 2^{(T)}}$ を有限次元周辺分布族に持つものが存在する．よって，$\mathrm{id} : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^T$ を X とすれば，これを分布に持つ確率変数であり，従って Gauss 過程である．

Step3 こうして得た X の平均と共分散がそれぞれ f, Φ であることを確認する．

(i) $X_t \sim \mathrm{N}(f(t), \Phi(t,t))$ より，$\mathrm{E}[X_t] = f(t)$．

(ii) $(X_t, X_s) \sim \mathrm{N}_2\left((f(t), f(s))^\top, (\Phi|_{\{s,t\}^2})\right)$ より，$\mathrm{Cov}[X_t, X_s] = \Phi(s,t) = \Phi(t,s)$．

■

2.3 再生核 Hilbert 空間（一般理論）

ノルム空間の極めて良い例になるが，再生核 Hilbert 空間は複数の位相が入り乱れる点が特に難しい（そしてこれが関数解析が難しい最大の理由の 1 つに他ならない）．

定義 2.10 (reproducing kernel Hilbert space). [†9]E を集合，$H \subset \mathcal{F}(E) := \mathrm{Map}(E, \mathbb{F})$ を部分線型空間とする．

(1) $H \subset \mathcal{F}(E)$ が次を満たすとき，これを**再生核 Hilbert 空間**という．

  (i) ある内積 $(-|-) : H \times H \to \mathbb{F}$ が存在して，$(H, (-|-))$ は Hilbert 空間となる．

  (ii) 評価写像の族 $\{\mathrm{ev}_p\}_{p \in E}$ は全て H 上連続である：$\{\mathrm{ev}_p\}_{p \in E} \subset H^*$．

(2) $H \subset \mathcal{F}(E)$ が，ある関数 $K : E \times E \to \mathbb{F}$ について K-**再生核 Hilbert 空間**であるとは，次を満たすことをいう：

  [H1] K の 1 変数化は H に属する：[†10]
$$K_p := K(-, p) \in H, \qquad p \in E.$$

  [H2] H 上の評価写像は核関数によって表現される：$\mathrm{ev}_p = (-|K_p)$ $(p \in E)$，すなわち，
$$f(p) = (f|K_p), \qquad p \in E, f \in H.$$

  このとき，$H = H_K(E)$ とも表し，K を**再生核**という．

要諦 2.11. 一般の関数 $K : E \times E \to \mathbb{F}$ に対して，K-再生核 Hilbert 空間 $H_K(E)$ は存在するとは限らないが，K が正定値ならば存在する（付録 D.1）．定理（付録 C.1）(2)⇒(3) より，任意の再生核 Hilbert 空間 H は，ある正定値関数 $K : E \times E \to \mathbb{C}$ が存在して，K-再生核 Hilbert 空間である：$H = H_K(E)$．

例 2.12 ([Moore, 1939] の例)**.** 歴史的に先に考えられたのが，半正定値関数 $K : T \times T \to \mathbb{F}$ が定める再生核 Hilbert 空間 $H_K(T)$ である．これは，$\{K_t\}_{t \in T}$ が生成する線型空間
$$H_0 := \left\{ f = \sum_{i=1}^k \alpha_i K(-, t_i) \in \mathcal{F}(T) \;\middle|\; \{t_i\}_{i=1}^k \subset T, \{\alpha_i\}_{i=1}^k \subset \mathbb{F}, k \in \mathbb{N} \right\}$$
に内積
$$\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i K(-, t_i) \;\middle|\; \sum_{j=1}^l \beta_j K(-, t'_j) \right) := \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \alpha_i \beta_j K(t_i, t'_j)$$
を定義すると，次の再生性 [A2] を満たす：
$$(f|K_t) = f(t), \qquad t \in T, f \in H_0.$$
あとはこれについての H_0 の完備化を考えれば再生核 Hilbert 空間の完成のだが，この完備化が $\mathcal{F}(E)$ 内でのどのような集合になるかは極めて精緻な観察をする必要がある（付録 D.1 参照）．かといって，抽象的な方法で完備化を取ってしまうともはや $\mathcal{F}(E)$ の部分集合ではなくなってしまう． □

[†9] [Paulsen and Raghupathi, 2016] 定義 1.1 p.3，[Saitoh and Sawano, 2016] 定義 1.1 p.1．

[†10] この写像を**特徴写像**という [瀬戸 et al., 2021] p.61．

2.4 再生核 Hilbert 空間（Gauss 過程の場合）

先の例で「完備化」のステップが問題になることを見た．Gauss 過程については，次のような迂回を考えることが出来る．次に，Brown 運動 $(B_t)_{t\in[0,1]}$ の再生核 Hilbert 空間を与える．

定義 2.13 (reproducing kernel Hilbert space of Gaussian processes). $\{X_t\}_{t\in T}\subset L^2(\Omega)$ を中心 Gauss 過程，$F\subset L^2(\Omega)$ をそれが生成する線型部分空間とする．**Gauss 過程 X の再生核 Hilbert 空間** $H_X(T)$ とは，写像

$$\begin{array}{ccc}\phi : L^2(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}^T \\ \cup & & \cup \\ h & \longmapsto & \left((h|X_t)_{L^2(\Omega)}\right)_{t\in T} = (\mathrm{Cov}[h,X_t])_{t\in T}\end{array}$$

の像 $H_X(T):=\phi(\overline{F})$ と，ϕ が押し出す $L^2(\Omega)$-内積との組をいう．

[証明]. $H_X(T)$ が ϕ が押し出す $L^2(\Omega)$-内積

$$\left(\sum_{i=1}^k a_iX_{t_i}\middle|\sum_{j=1}^l b_jX_{t_j}\right)_{L^2(\Omega)} = \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l a_ib_j\mathrm{E}[X_{t_i}X_{t_j}] = \sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l a_ib_j\mathrm{C}(t_i,t_j) = \left(\phi\left(\sum_{i=1}^k a_iX_{t_i}\right)\middle|\phi\left(\sum_{j=1}^l b_jX_{t_j}\right)\right)_{H_X}$$

について Hilbert 空間をなすことが示されねばならない．同時に，$H_X(T)$ は像

$$H_0 := \phi(F) = \left\{\sum_{i=1}^k a_i\mathrm{C}(-,t_i)\in\mathbb{R}^T \;\middle|\; \{a_i\}_{i=1}^k\subset\mathbb{R}, \{t_i\}_{i=1}^k\subset T, k\in\mathbb{N}\right\}$$

を稠密部分集合に持つことも示す．

(1) $\phi : F\to H_0$ は，像 H_0 上に ϕ が押し出す内積について，ノルムを保つ線型同型である．

証. $\phi : L^2(\Omega)\to\mathbb{R}^T$ が線型であるのは，$L^2(\Omega)$-内積の線型性から従う．また ϕ は内積を保つ（ように H_0 上の内積を定義した）から，特に $\phi : F\to\phi(F)$ はノルムも保ち，等長でもある：

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_iX_{t_i}\right\|^2_{L^2(\Omega)} = \sum_{i,j=1}^n a_ia_j\mathrm{E}[X_{t_i}X_{t_j}] = \left\|\phi\left(\sum_{i=1}^n a_iX_{t_i}\right)\right\|^2_H.$$

□

(2) 内積空間の同型 $\phi : F \xrightarrow{\sim} H_0$ は Hilbert 空間の同型 $\phi : \overline{F}\xrightarrow{\sim} H := \phi(\overline{F})$ を引き起こす．

証. 任意の $g,h\in\overline{F}$ について，$H_X(T)$ 上の内積の定義は

$$(\phi(h)|\phi(g))_{H_X} = (h|g)_{L^2}$$

であるから，引き続き，H 上に ϕ が押し出す内積について，$\phi : \overline{F}\to H$ は内積を保つ．特に有界線型作用素であるが，一般に距離空間の間の Lipschitz 連続写像は完備性を保つことから，H も完備である． □

(3) 最後に，$\overline{\phi(F)} = \overline{H_0} = H = \phi(\overline{F})$ は，ϕ の連続性から $H=\phi(\overline{F})\subset\overline{\phi(F)}=\overline{H_0}$ より従う．

■

命題 2.14 (再生核の一意性). $(H,(-|-))$ を K-再生核 Hilbert 空間，$H'\subset\mathcal{F}(T)$ はある内積 $(-|-)_{H'}$ について Hilbert 空間になり，次の 2 条件を満たすとする：

[H1] 任意の $t\in T$ について，$K(-,t)\in H'$.

[H2] 任意の $t\in T$ について，

$$(f|K(-,t))_{H'} = f(t),\qquad f\in H'.$$

このとき，$(H',(-|-)_{H'}) = (H,(-|-))$.

[証明]. [†11] これは Riesz 表現 $H_K(E)\to H_K(E)^*$ の単射性による．直接的に $p,q\in E$ を任意にとって $K(p,q)=L(p,q)$ も示して

†11 [Saitoh and Sawano, 2016] 命題 2.2 p.71.

みる．まず，$H_K(E)$ の再生性 [A2] より，

$$L(p,q) = \mathrm{ev}_p(L_q) = (L_q|K_p).$$

一方で (2) より，

$$(L_q|K_p) = \overline{(K_p|L_q)} = \overline{K(q,p)} = K(p,q)$$

でもある．■

系 2.15．$T = [0,1], K(s,t) := s \wedge t \ (s,t \in T)$ の定める K-再生核 Hilbert 空間は，

$$H := \left\{ f \in \mathrm{AC}([0,1]) \mid f(0) = 0, f' \in L^2([0,2]) \right\}, \qquad (f|g) := \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt,$$

である．よって，K が Brown 運動 $(B_t)_{t\in[0,1]}$ の共分散関数である（付録 E.2）ことと併せると，これが $(B_t)_{t\in[0,1]}$ の再生核 Hilbert 空間である．

[証明]．

Step1 H は Hilbert 空間をなす．

Step2 H が K-再生核 Hilbert 空間であることを示せば良い．

[H1] 任意の $t \in T$ について，写像 $[0,1] \ni s \mapsto s \wedge t$ は 1-Lipschitz 連続関数であるから，H の元である．

[H2] 任意の $t \in T$ と $f \in H$ について，

$$(f|K(-,t)) = \int_0^t f'(s)\,ds = f(t) - f(0) = f(t).$$

■

3 l^∞-空間と C_u-空間に属する見本道を持つ過程

一様有界な見本道を（必ず）持つ確率過程は，$C_u(T)$-値確率変数という Banach 空間値の確率変数と見做せる．

3.1 $C_u(T)$-過程の性質

定義 3.1 (sample bounded, sample (bounded and uniformly) continuous)．[†12]過程 $\{X_t\}_{t\in T}$ について，

(1) $\{X_t\}_{t\in T}$ が l^∞-**過程**であるとは，あるバージョン $\widetilde{X}$ と充満集合 $\Omega_0 \subset \Omega$ が存在して，$\widetilde{X}_\bullet(\Omega_0) \subset l^\infty(T)$ が有界であることをいう：

$$\sup_{t\in T}|\widetilde{X}_t| < \infty \quad \text{a.s.}$$

(2) T を擬距離空間とする．$\{X_t\}_{t\in T}$ が C_u-**過程**であるとは，あるバージョン $\widetilde{X}$ と充満集合 $\Omega_0 \subset \Omega$ が存在して，$\widetilde{X}_\bullet(\Omega_0) \subset C_u(T)$ を満たすことをいう．

命題 3.2 ($C_u(T)$-過程の性質)．(T,d) を全有界な擬距離空間とすると，$C_u(T)$ の Borel σ-代数 $\mathcal{B}(C_u(T))$ は積 σ-代数 $\mathcal{C}$ に一致する．よって特に，

(1) $C_u(T)$-過程はタイトな Borel 確率分布を持つ．

(2) $C_u(T)$-過程が必ず有界かつ一様連続な見本道を持つならば，$C_u(T)$-値確率変数である．

(3) $\mathcal{B}(C_u(T))$ 上の Borel 確率測度は，その有限次元周辺分布で一意に特徴付けられる．

[証明]．一般に積空間において，Kolmogorov の積 σ-代数は，Borel の σ-代数より大きくない．$\mathcal{C}$ は射影 ev_t を可測にする最小の σ-代数，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^T)$ は射影 ev_t を連続かつ可測にする最小の σ-代数であるため．よってあとは $\mathcal{B}(C_u(T)) \subset \mathcal{C}$ を示せば良い．

Step1 全有界距離空間は可分である 1.8.

[†12] [Giné and Nickl, 2021] 定義 2.1.3.

Step2 $C_u(T)$ の開球・閉球は可測：よって可算な稠密部分集合 $T_0 \subset T$ が取れて，

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in T_0}|f(t)|.$$

よって，開球と閉球とは可測．

Step3 T が全有界より $C_u(T)$ も可分である 1.16 から，第 2 可算である．よって，任意の開集合は開球の可算合併であり，$\mathcal{B}(C_u(T)) \subset C_u(T) \cap \mathcal{C}$ を得る．

(1) $C_u(T)$-過程 $\{X_t\}_{t\in T}$ は，$X : \Omega \to \mathbb{R}^T$ と見ると $\mathcal{C}/\mathcal{A}$-可測である．$\mathcal{C}$ 上に押し出す分布を μ で表す．$\{X_t\}$ は $C_u(T)$-過程であるから，μ は $\mathcal{C} \cap C_u(T)$ 上に台を持つが，$\mathcal{C} \cap C_u(T) = \mathcal{B}(C_u(T))$ であり，μ は Polish 可測空間 $(C_u(T), \mathcal{B}(C_u(T)))$ 上の Borel 確率測度とみれる．Oxtoby-Ulam の定理 1.13 より，タイトである．

(2) $C_u(T)$-値確率変数と見たとき，$\mathcal{B}(C_u(T))/\mathcal{A}$-可測となるからである．一般の $C_u(T)$-過程が確率変数と見れるかは，基礎となる確率空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ が完備であるかに依存する．

(3) T が全有界のとき，$\mathcal{B}(C_u(T)) = \mathcal{C}$ であるため．

■

例 3.3 (Wiener 測度)**.** $\mathbb{R}_+$ 上の **Brown 運動** $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ とは，次を満たす過程をいう（付録 E.1 も参照）：

[B1] 中心性：$B_0 = 0$ a.s.

[B2] 加法性：任意の $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$ $(n \geqslant 2)$ について，増分 $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \cdots, B_{t_2} - B_{t_1}$ は独立．

[B3] 増分の正規性：任意の $0 \leqslant s < t$ について，$B_t - B_s \sim \mathrm{N}(0, t-s)$.

[B4] C-過程：殆ど確実に見本道 $t \mapsto B_t(\omega)$ は連続．

Brown 運動 $(B_t)_{t\in T}$ は任意の $\gamma < 1/2$ に対して γ-Hölder 連続性を（殆ど確実に）持ち，時区間 $T \subset \mathbb{R}_+$ が有界であるときに $C_u(T)$-過程である．$\mathbb{R}_+$ の部分集合については，有界性と全有界性は同値になるから，T が有界のとき $C_u(T)$ は可分 1.16．更に $B : \Omega \to C_u(T)$ は $\mathcal{B}(C([0,1]))/\mathcal{A}$-可測になる 3.2．この可測写像 B が押し出す $\mathcal{B}(C([0,1]))$ 上の確率測度を **Wiener 測度**という．□

3.2 確率過程が確率変数を定めない例

例 3.4. $(\Omega, \mathcal{A}) := ([0,1], \mathcal{B}([0,1])), T := [0,1]$ とし，写像 $X : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ を $X(t,\omega) := 1_{[0,t]}(\omega) = 1_{[\omega,1]}(t)$ で定める．するとこれは必ず $l^\infty(T)$ に属する見本道を持つ過程であるが，$l^\infty(T)$-値写像 $X_\bullet : \Omega \to l^\infty(T)$ と見たとき，$\mathcal{B}(l^\infty(T))/\mathcal{A}$-可測ではない．□

[証明]**.** 開球 $B_{1/2}(1_{[s,1]}) \overset{\text{open}}{\subset} l^\infty(T)$ に注目すると，

$$X_\bullet^{-1}(B_{1/2}(1_{[s,1]})) = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \|1_{[s,1]} - 1_{[\omega,1]}\| < \frac{1}{2}\right\} = \{s\}.$$

これを用いて，$A \notin P(\Omega)\backslash\mathcal{A}$ を取り，$U := \bigcup_{a\in A} B_{1/2}(1_{[a,1]}) \overset{\text{open}}{\subset} l^\infty(T)$ とすると，

$$X_\bullet^{-1}(A) = A \notin \mathcal{A}$$

が成り立ってしまう．この問題は $(\Omega, \mathcal{A})$ を完備化して，$\mathcal{A}$ を $\Omega = [0,1]$ 上の Lebesgue 可測集合の全体としようが解決しない．■

3.3 有界な見本道を持つ過程がタイトな分布を持つとき

実は，有界な見本道を持つ確率過程がタイトな確率分布を持つ場合は，この $C_u(T)$-過程の場合に限る．

命題 3.5 ($l^\infty(T)$-過程がタイトな Borel 分布に従うための必要十分条件)**.** T を集合，X を $l^\infty(T)$-過程とする．このとき，次は同値：

(1) X の有限次元周辺分布は，$l^\infty(T)$ 上のあるタイトな Borel 確率測度の有限次元周辺分布である．

(2) T 上に擬距離 d が存在し，(T,d) は全有界になり，これについて X の分布は $C_u(T)\subset l^\infty(T)$ 上に台を持つ．

[証明]. †13

(1)⇒(2) $l^\infty(T)$ 上の緊密な Borel 確率分布 $\mu\in P(l^\infty(T))$ の有限次元周辺分布が，X のものと一致するとする．

距離の構成 μ は緊密だから，σ-コンパクトな集合 K 上に台を持つ．実際，任意の $n\in\mathbb{N}^+$ に対して，$K_n\overset{\text{cpt}}{\subset} l^\infty(T)$ が存在して，

$$\mu(K_n)>1-\frac{1}{n}.$$

$K:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^+}K_n$ とすると，$\forall_{n\in\mathbb{N}^+}\ \mu(K)>1-n^{-1}$ だから，$\mu(K)=1$ が成り立つ．これに対して，T 上の擬距離を

$$d(s,t):=\sum_{n=1}^\infty\frac{1\wedge d_n(s,t)}{2^n},\qquad d_n(s,t):=\sup_{f\in K_n}\lvert f(s)-f(t)\rvert,\qquad s,t\in T.$$

と定める．明らかに $d(s,s)=0$ かつ対称で，三角不等式も

$$d_n(s,u)\leqslant d_n(s,t)+d_n(t,u)$$

から成り立つ．

全有界性の証明 (T,d) が全有界になることを証明する．任意の $\epsilon>0$ に対して，有限個の T の開球 $\{U_\epsilon(t_i)\}_{i=1}^N$ でこれを被覆するものを構成すれば良い．

Step1 ある $m\in\mathbb{N}$ が存在して，

$$\sum_{n=m+1}^\infty\frac{1}{2^n}<\frac{\epsilon}{4}.$$

であるから，$d(s,t)<\epsilon$ を導くには $\sum_{n=1}^m\frac{1\wedge d_n(s,t)}{2^n}$ を $3\epsilon/4$ 以下に抑えれば良い．そして，$d_n(s,t)$ $(1\leqslant n\leqslant m)$ は $K':=\bigcup_{n=1}^m K_n$ の元 $f\in K'$ の値しか見ないことに注目する．

Step2 すると，コンパクト集合の有限合併 $K'=\bigcup_{n=1}^m K_n\subset l^\infty(T)$ はコンパクト，特に全有界であるから，有限集合 $\{f_1,\cdots,f_r\}\subset K'$ が存在して，$\{U_{\epsilon/4}(f_s)\}_{s\in[r]}$ は K' を被覆する．すなわち，任意の $f\in K'$ に対して，$s\in[r]$ が存在して，

$$\|f-f_s\|_\infty<\frac{\epsilon}{4}.$$

が成り立つ．

Step3 続いて，

$$A:=\mathrm{Im}\,(f_1,\cdots,f_r)=\{(f_1(t),\cdots,f_r(t))\in\mathbb{R}^r\mid t\in T\}\subset[-M,M]^r,\qquad M:=\max_{1\leqslant s\leqslant r}\|f_s\|,$$

は $\mathbb{R}^r$ の有界集合であるから全有界であり，よってある有限部分集合 $T_\epsilon:=\{t_1,\cdots,t_N\}\subset T$ が存在して，$\{U_{\epsilon/4}(f_1(t_i),\cdots,f_r(t_i))\}_{i\in[N]}$ は A を被覆する．特に，任意の $t\in T$ に対して，ある $i\in[N]$ が存在して，

$$\max_{1\leqslant s\leqslant r}\lvert f_s(t)-f_s(t_i)\rvert<\frac{\epsilon}{4}.$$

Step4 Step2, 3 を総じて，$n\leqslant m$ のときの $d_n(s,t)$ は，任意の $t\in T$ に対して $t_i\in T_\epsilon$ をうまく取ることで，

$$\begin{aligned}d_n(t,t_i)&=\sup_{f\in K_n}\lvert f(t)-f(t_i)\rvert\\&\leqslant\sup_{f\in K_n}\Big(\lvert f(t)-f_s(t)\rvert+\lvert f_s(t)-f_s(t_i)\rvert+\lvert f_s(t_i)-f(t_i)\rvert\Big)\\&<\frac{\epsilon}{2}+\max_{1\leqslant s\leqslant r}\lvert f_s(t)-f_s(t_i)\rvert<\frac{3}{4}\epsilon.\end{aligned}$$

よって Step1 と併せれば，評価

$$d(t,t_i)<\frac{\epsilon}{4}+\sum_{n=1}^m\frac{d_n(s,t)}{2^n}<\epsilon.$$

†13 [Giné and Nickl, 2021] 命題 2.1.7 p.18 の証明は Hoffmann-Jørgensen (1991) によるもの．

X の分布の台　μ は K 上に台を持つから，あとは $K \subset C_u(T)$ を示せば良い．しかしこれは構成から明らかである．任意に $f \in K$ を取ると，ある $n \in \mathbb{N}$ について $f \in K_n$ であるから，

$$|f(s) - f(t)| \leqslant d_n(s,t) \leqslant 2^n d(s,t), \qquad s,t \in T.$$

よって，任意の $\epsilon > 0$ に対して，任意の $s,t \in T$ が $d(s,t) < 2^{-n}\epsilon$ を満たせば，$|f(s) - f(t)| < \epsilon$ と出来る．$f \in l^\infty(T)$ だから有界でもある．

(2)⇒(1)　X の $(l^\infty(T), l^\infty(T) \cap \mathcal{C})$ 上での分布を μ とする．

Step1　まず μ は $(C_u(T), \mathcal{B}(C_u(T)))$ 上の分布として緊密である．

<u>証</u>．(T,d) が全有界のとき，$C_u(T)$ は可分 1.16．よって，X の分布を μ とすると，これは $(C_u(T), \mathcal{B}(C_u(T)))$ 上の分布と見ることができる 3.2．すると Oxtoby-Ulam の定理 1.13 より μ は緊密．□

Step2　続いて，μ は $(l^\infty(T), \mathcal{B}(l^\infty(T)))$ 上の分布と見ることも出来て，これもやはり緊密になり，元の μ と有限次元分布は変わらない．

<u>証</u>．包含写像 $i : C_u(T) \hookrightarrow l^\infty(T)$ は等長写像であるから埋め込みである．特に連続であるから，$\mathcal{B}(C_u(T))/\mathcal{B}(l^\infty(T))$-可測であり，よって $(l^\infty(T), \mathcal{B}(l^\infty(T)))$ に分布 $i_*\mu$ を押し出す．

(i)　これは再び緊密である．任意の $\epsilon > 0$ に対してある $K \overset{\text{cpt}}{\subset} C_u(T)$ が存在して

$$\mu(K) > 1 - \epsilon$$

を満たすから，$K' := i(K)$ とするとこれもコンパクトで，

$$i_*\mu(K') = \mu(i^{-1}(K')) = \mu(K) > 1 - \epsilon.$$

(ii)　有限次元分布は変わらない．そもそも $F \overset{\text{finite}}{\subset} T$ 上の有限次元分布とは $\mathrm{ev}_F : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}^F$ が押し出す分布のことであり，次の図が可換であることから，μ も $i_*\mu$ も $\mathbb{R}^F$ 上に押し出す分布は変わらなくなるのである：

$$\begin{tikzcd} C_u(T) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi_F"'] & l^\infty(T) \arrow[dl, "\pi_F"] \\ \mathbb{R}^F & \end{tikzcd}$$

□

■

付録 A　位相の基礎

<u>**定義 付録 A.1**</u> **(isolated point, adherent point, accumulated point, closure, dense).** X を位相空間，$x \in X, A \subset X$ とする．

(1) x が A の内点であるとは，$x \in A$ かつある開近傍 $U \in \mathcal{O}(x)$ が $U \subset A$ を満たすことをいう．
(2) $\{x\} \in \mathcal{O}(x)$ のとき，**孤立点**という．これは全空間 X の集積点でないことに同値．
(3) $\forall_{U \in \mathcal{O}(x)}\ U \cap A \neq \varnothing$ のとき，A の**触点**という．
(4) $\forall_{U \in \mathcal{O}(x)}\ (U \cap A) \backslash \{x\} \neq \varnothing$ のとき，A の**集積点**という．
(5) A の触点全体の集合を**閉包** $\overline{A}$ という．
(6) $\overline{A} = X$ のとき，X **上稠密**であるという．

<u>**命題 付録 A.2**</u> **(開核，閉包，稠密性の特徴付け).** $A \subset X$ とする．

(1) A° は A に含まれる開集合のうち最大のものである．
(2) $\overline{A}$ は A を含む閉集合のうち最小のものである．

<u>**[証明]**</u>.

(1) A に含まれる開集合の全体

$$\mathcal{U}_A := \{U \in \mathcal{O}_X \mid U \subset A\}.$$

の最大元は $\cup\mathcal{U}_A$ に他ならない．実は

$$A^\circ = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_A} U.$$

が成り立つ．よって，A° は A に含まれる開集合であり，かつ，その最大のものである．

(2) $B := X \backslash A$ を考えると，$\overline{A} = X \backslash B^\circ$ が成り立つ．B° は $X \backslash A$ に含まれる最大の開集合であるから，$\overline{A}$ は X を含む最小の閉集合である．

■

命題 付録 A.3 (距離空間における閉包の特徴付け). $d(-, A) : X \to \mathbb{R}_+$ を $\varnothing \neq A \subset X$ からの距離とする．

(1) $|d(x, A) - d(y, A)| \leqslant d(x, y)$ が成り立つ．特に，関数 $d(-, A) : X \to \mathbb{R}_+$ は連続である．

(2) $\overline{A} = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ である．

[証明]. †14

(1) (i) 任意の $a \in A$ について，三角不等式より，

$$d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a), \qquad x, y \in X.$$

$a \in A$ に関して下限を取ることで，

$$d(x, A) \leqslant d(x, y) + d(y, A) \quad \Leftrightarrow \quad d(x, A) - d(y, A) \leqslant d(x, y).$$

$x, y \in X$ を逆にしても成り立つから，結論を得る．

(ii) この結果は，関数 $d(-, A) : X \to \mathbb{R}$ の Lipschitz 連続性を表す式と見れる．よって特に連続である．

(2) 距離空間の位相は開球が生成することより，

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall_{r>0}\ U(x, r) \cap A \neq \varnothing\}$$

と表せるが，実は

$$\forall_{r>0}\ U_r(x) \cap A \neq \varnothing \quad \Leftrightarrow \quad d(x, A) = 0$$

が成り立つ．$\Leftarrow$ は対偶命題がすぐに示せる．$\Rightarrow$ は点列 $(x_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} U_{1/n}(x) \cap A \neq \varnothing$ を取れば，$d(-, A) : X \to \mathbb{R}_+$ の連続性より，

$$d(x, A) = \lim_{n \to \infty} d(x_n, A) = \lim_{n \to \infty} 0 = 0.$$

■

命題 付録 A.4 (閉集合と閉包による特徴付け). 写像 $f : X \to Y$ について，次の 3 条件は同値．

(1) f は連続である．

(2) 任意の閉集合 $B \subset Y$ に対して，$f^{-1}(B)$ は閉．

(3) $\forall_{A \in P(X)}\ f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

[証明]. †15

(1)⇔(2)　任意の集合 $U \subset Y$ と $B := Y \backslash U$ について，

$$f^{-1}(B) = X \backslash f^{-1}(U)$$

が成り立つため．

†14 [斎藤毅, 2009] 命題 5.2.6 p.115.

†15 [斎藤毅, 2009] 命題 4.3.4 pp. 103-104.

(2)⇒(3)　まず

$$f(A) \subset \overline{f(A)} \quad \Leftrightarrow \quad A \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$$

に注目すると，随伴性??から $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)}) \Leftrightarrow f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ が直ちに従う．

(3)⇒(2)　任意の $B \overset{\text{closed}}{\subset} Y$ に対して，$A = f^{-1}(B)$ が閉包作用素に対して変わらないことを示せば良い．これは $f(A) \subset B$ から

$$f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)} \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A} \subset f^{-1}(B) = A$$

と従う．

■

系 付録 A.5 (点列による閉包の特徴付け). X を位相空間，$A \subset X$ を部分集合とする．

$$B := \{a \in X \mid a \text{ に収束する } A \text{ の点列 } (x_n) \text{ が存在する }\}$$

について，

(1) 極限点は触点である：$\overline{A} \supset B$.
(2) (AC) X が距離空間ならば，$\overline{A} = B$.

[証明]. †16

(1) 任意の $a \in B$ を取ると，これに収束する列 $\{x_n\} \subset A$ が存在する．これが定める $\widetilde{x} : \widetilde{\mathbb{N}} \to X$ は連続であるから，連続写像の特徴付け付録 A.4 より，$a \in \widetilde{x}(\widetilde{\mathbb{N}}) \subset \overline{\widetilde{x}(\mathbb{N})} = \overline{A}$.
(2) 任意の $a \in \overline{A}$ を取ると，任意の $n \in \mathbb{N}^+$ に対して，$U_{1/n}(a) \cap A \neq \varnothing$ が成り立つ．選択公理より，点列

$$(x_n) \in \prod_{n \in \mathbb{N}^+} (U_{1/n}(a) \cap A)$$

が取れ，これは $\lim_{n \to \infty} d(x_n, a) = 0$ を満たす．

■

付録 B　コンパクト性の特徴付け

コンパクト集合 $A \overset{\text{cpt}}{\subset} X$ を，任意の位相空間 $Y \in \mathrm{Top}$ に対して $X \times Y$ の中で見ると，一点と位相的に同じ性質を満たすことで特徴付けられる．

命題 付録 B.1 (コンパクト性の積位相の言葉による特徴付け). X を位相空間とし，A を X の部分集合とする．次の 3 条件は同値である．

(1) A はコンパクトである．
(2) Y を任意の位相空間とし，$y \in Y$ を任意の点とする．$A \times \{y\}$ の任意の開近傍 $W \subset X \times Y$ に対し，A の開近傍 $U \subset X$ と y の開近傍 $V \subset Y$ で，$U \times V \subset W$ を満たすものが存在する．
(3) Y を任意の位相空間とし，$y \in Y$ を任意の点とする．$A \times \{y\}$ の任意の開近傍 $W \subset X \times Y$ に対し，y の開近傍 $V \subset Y$ で，$A \times V \subset W$ を満たすものが存在する．

[証明]. †17

(1)⇒(2)　任意の $A \times \{y\}$ の開近傍 $W \overset{\text{open}}{\subset} X \times Y$ を取る．このとき，任意の $x \in A$ に対して，開近傍の組 $U \in \mathcal{O}_X(x), V \in \mathcal{O}_Y(y)$ であって，$(x, y) \in U \times V \subset W$ を満たすものが存在する．これより，

$$\mathcal{W} := \left\{ (U, V) \in P(X) \times P(Y) \mid U \overset{\text{open}}{\subset} X, V \in \mathcal{O}_Y(y), U \times V \subset W \right\}$$

†16 [斎藤毅, 2009] 系 8.2.4 p.199.
†17 [斎藤毅, 2009] 命題 6.4.1 p.155.

と定めたならば，$A\times\{y\}\subset\bigcup_{(U,V)\in\mathscr{W}}(U\times V)\subset W$，かつ，$A\subset\bigcup_{(U,V)\in\mathscr{W}}U$ が成り立つ．しかし A はコンパクトと仮定したから，有限個の元 $(U_1,V_1),\cdots,(U_n,V_n)\in\mathscr{W}$ が存在して，$A\subset U_1\cup\cdots\cup U_n$ が成り立つ．ここで，$U:=\bigcup_{i=1}^n U_i, V:=\bigcap_{i=1}^n V_i$ と定めると，それぞれ X,Y の開集合であり，

$$A\times\{y\}\subset U\times V=\bigcup_{i=1}^n U_i\times V\subset\bigcup_{i=1}^n U_i\times V_i\subset W.$$

(2)⇒(3)　$A\times V\subset U\times V\subset W$ より．

(3)⇒(1)　任意に A の開被覆 $A\subset\bigcup_{i\in I}U_i$ を取る．位相空間 $Y:=\mathbb{S}^I$ を $\mathbb{S}:=(2,\{\varnothing,\{1\},2\})$ の積空間とし，点 $y\in Y$ を I 上の定数関数 1 とする．Y の開集合 V_i と，$X\times Y$ の開集合 W を

$$V_i:=\left\{(s_j)\in\mathbb{S}^I\mid s_i=1\right\}=\mathrm{pr}_i^{-1}(1),\qquad W:=\bigcup_{i\in I}U_i\times V_i,$$

と定めると，W は $A\times\{y\}$ の開近傍である．実際，いま $y\in\bigcap_{i\in I}V_i$ より，

$$(X\times\{y\})\cap W=\bigcup_{i\in I}(U_i\times(\{y\}\cap V_i))=\bigcup_{i\in I}U_i\times\{y\}$$

であることから従う．よって，仮定から，ある開近傍 $1\in V\overset{\text{open}}{\subset}Y$ が存在して，$A\times V\subset W$ が成り立つ．$V_J:=\{1\}^J\times\mathbb{S}^{I\setminus J}\overset{\text{open}}{\subset}Y$ ($J\overset{\text{finite}}{\subset}I$) は Y の開集合の基底をなすから，ある $J\overset{\text{finite}}{\subset}I$ が存在して，$y\in V_J\subset V$ が成立．さらに，J の特性関数 χ_J は V_J の元より，$A\times\{\chi_J\}\subset A\times V_J\subset A\times V\subset W$．すなわち，$(X\times\{\chi_J\})\cap W=\bigcup_{i\in J}U_i\times\{\chi_J\}$ であるから，$A\subset\bigcup_{i\in J}U_i$ が結論づけられた．

■

命題 付録 B.2 (コンパクト性の射影の言葉による特徴付け)． 位相空間 X について，次の 2 条件は同値．

(1) X はコンパクトである．

(2) 任意の位相空間 Y に対して，$\mathrm{pr}_2:X\times Y\to Y$ は閉写像である．

[証明]． [†18]条件 (1) は次の (3) と同値であり（付録 B.1），条件 (2) は次の (4) と同値である：

(3) 任意の位相空間 Y と点 $y\in Y$ に関し，$X\times\{y\}$ の任意の開近傍 $W\overset{\text{open}}{\subset}X\times Y$ に対して，y の開近傍 $V\overset{\text{open}}{\subset}Y$ で $X\times V\subset W$ を満たすものが存在する．

(4) 任意の位相空間 Y に関し，任意の閉集合 $F\overset{\text{closed}}{\subset}X\times Y$ と任意の点 $y\in Y\backslash\mathrm{pr}_2(F)$ に対して，y の開近傍 $V\overset{\text{open}}{\subset}Y$ で $V\subset Y\backslash\mathrm{pr}_2(F)$ を満たすものが存在する．

あとは (2)⇔(3) を示せば良いが，これは任意の部分集合 $F=(X\times Y)\backslash W$ と $V\subset Y$ に対して，

$$X\times\{y\}\subset W\quad\Leftrightarrow\quad\mathrm{pr}_2^{-1}(y)\cap F=\varnothing\quad\Leftrightarrow\quad y\in Y\backslash\mathrm{pr}_2(F)$$
$$X\times V\subset W\quad\Leftrightarrow\quad\mathrm{pr}_2^{-1}(V)\cap F=\varnothing\quad\Leftrightarrow\quad V\subset Y\backslash\mathrm{pr}_2(F)$$

より従う．■

系 付録 B.3 (連続写像はコンパクト性を保存する)． X,Y を位相空間，$f:X\to Y$ を連続写像とする．コンパクト集合 $A\overset{\text{cpt}}{\subset}X$ の像もやはりコンパクト：$f(A)\overset{\text{cpt}}{\subset}Y$．

[証明]． [†19]任意の位相空間 Z とその点 $z\in Z$ と開近傍 $f(A)\times\{z\}\subset W\overset{\text{open}}{\subset}Y\times Z$ を取る．開近傍 $z\in V\overset{\text{open}}{\subset}Z$ であって $f(A)\times V\subset W$ を満たすものを構成すれば良い付録 B.1．いま $A\overset{\text{cpt}}{\subset}X$ はコンパクトだから，開近傍 $(f\times\mathrm{id}_Z)^{-1}(W)\overset{\text{open}}{\subset}X\times Z$ に対して，ある $z\in V\overset{\text{open}}{\subset}Z$ が存在して，$A\times V\subset(f\times\mathrm{id}_Z)^{-1}(W)$，すなわち，$f(A)\times V\subset W$ を満たす．■

[†18] [斎藤毅, 2009] 命題 6.4.4 p.158.
[†19] [斎藤毅, 2009] 系 6.4.3 p.158.

付録 C　再生核 Hilbert 空間の 2 つの定義の同値性

定理 付録 C.1 ([Gilbert and Hile, 1977]). E を非空集合，$\mathcal{F}(E) := \mathrm{Hom}(E, \mathbb{F})$ に $\{\mathrm{ev}_p\}_{p\in E}$ が定める始位相を考え，H を $\mathcal{F}(E)$ の部分集合上に考えた Hilbert 空間とする．次は同値：

(1) 包含写像 $H \hookrightarrow \mathcal{F}(E)$ は連続.

(2) 任意の $p \in E$ について，$\{\mathrm{ev}_p|_H\}_{p\in E}$ は H 上連続：$\{\mathrm{ev}_p|_H\}_{p\in E} \subset H^*$.

(3) ある正定値関数 $K : E \times E \to \mathbb{C}$ が存在して，H は K-再生核 Hilbert 空間である：$H = H_K(E)$.

[証明]. [†20]

(1)⇒(2)　合成 $\mathrm{pr}_p|_H = \mathrm{pr}_p \circ i$ として表され，連続写像の合成であるため，再び連続．$H, \mathbb{F}$ のいずれもノルム空間であるから，$\mathrm{pr}_p|_H$ は有界でもある．

(2)⇒(1)　次の図式が可換であることに注意：

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_p|_H"'] & \mathcal{F}(E) \arrow[d, "\mathrm{pr}_p"] \\ & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$

すると，$\mathrm{pr}_p|_H = \mathrm{pr}_p \circ i$ が連続であることから，i は連続である必要がある．あるいは，直接的に次のように示すこともできる．$\{f_k\} \subset H$ を $f \in H$ に収束する列とすると，

$$|f(p) - f_k(p)| = |\mathrm{pr}_p(f - f_k)| \leqslant \|\mathrm{pr}_p|_H\| \|f - f_k\| \to 0.$$

より，任意の $p \in E$ について $f_k(p) \to f(p)$．すなわち，H の位相は $\mathcal{F}(E)$ の相対位相よりも強い（弱くない）.

(2)⇒(3)　仮定より，任意の $p \in E$ について $\mathrm{ev}_p|_H \in H^*$ である．よって，ある $h_p \in H$ が存在して，

$$f(p) = \mathrm{ev}_p(f) = (f|h_p), \qquad f \in H,$$

が成り立つ．これについて，

$$K(p, q) = K_q(p) := h_q(p), \qquad p, q \in E,$$

と定めると，(H, K) は再生核 Hilbert 空間である．

(3)⇒(2)　任意の $p \in E$ について，[H2] より

$$\mathrm{ev}_p(f) = f(p) = (f|K_p), \qquad f \in H,$$

だから，$\mathrm{ev}_p = (-|K_p) \in H^*$ である．

■

補題 付録 C.2 (K-再生核 Hilbert 空間の性質). $K : E \times E \to \mathbb{C}$ を核関数，$H = H_K(E)$ を K-再生核 Hilbert 空間とすると，

(1) 核関数の族 $\{K_q\}_{q\in E}$ は H の稠密部分空間を生成する．

(2) 任意の $p, q \in E$ について，

$$K(p, q) = (K_q|K_p), \qquad p, q \in E.$$

特に，E を Hilbert 空間，K をその上の内積，$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ とすると，K の転置 $K_- : E \to H$ は Hilbert 空間の同型である：

(3) 核 K は正定値対称関数である．

(4) $\{f_n\} \subset H$ が f にノルム収束するならば，f に各点収束もする．[†21] さらにこの収束は $x \mapsto K(x, x)$ が有界になる $A \subset E$ 上で一様である．

(5) $\{f_n\} \subset H$ が f の弱収束するならば，f に各点収束もする．

[†20] [Saitoh and Sawano, 2016] 補題 2.1 p.66 が (1)⇔(2)，定理 2.1 が (1)⇔(3) を与えており，[Gilbert and Hile, 1977] を参照している．(2)⇔(3) は [Aronszajn, 1950] p.343 でも Existence theorem of r.k. として触れられている．

[†21] この性質が RKHS の計算機算譜としての優位性の 1 つを与える [Nashed and Wahba, 1974] p.71.

[証明]. [†22]

(1) 条件 [H2] から $\mathrm{Span}(\{K_q\}_{q\in E})^\perp = 0$ が従い，$\mathrm{Span}(\{K_q\}_{q\in E})$ のノルム閉包が H であることがわかる．実際，任意の $f \in \mathrm{Span}(\{K_q\}_{q\in E})^\perp$ を取ると，
$$(f|K_q) = f(q) = 0, \qquad q \in E,$$
より，$f = 0$ が必要．

(2) 任意の $p, q \in E$ について，
$$K(p,q) = K_q(p) = \mathrm{ev}_p(K_q) = (K_q|K_p), \qquad p,q \in E.$$

(3) K の対称性は (2) と内積の対称性から従う．K の正定値性も同様である：(2) の等式
$$K(p,q) = K_q(p) = (K_q|K_p)$$
に注意すれば，任意の関数 $X : E \to \mathbb{C}$ と有限部分集合 $F \overset{\text{finite}}{\subset} E$ とについて，
$$\sum_{p,q\in F} \overline{X(p)} X(q) K(p,q) = \sum_{p,q\in F} (X(q)K_q|X(p)K_p) = \left\| \sum_{p\in F} X(p)K_p \right\|^2 \geqslant 0.$$

(4) 任意の $p \in E$ について，
$$|f_n(p) - f(p)| = |\mathrm{pr}_p(f_n - f)| \leqslant \|\mathrm{pr}_p\| \|f_n - f\| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$
ここで $|\mathrm{pr}_p(f_n - f)| = |(f_n - f|K_p)| \leqslant \|K_p\|\|f_n - f\|$ $(p \in E)$ であるが，
$$\|K_p\|^2 = (K_p|K_p) = K(p,p)$$
より，これは $A \subset E$ 上で有界になる．

(5) $f_n \xrightarrow{w} f$ ならば，$(f_n|K_p) \to (f|K_p)$ が任意の $p \in E$ について必要であるが，これは $f_n(p) \to f(p)$ $(p \in E)$ を意味する．

■

付録 D　Aronszajn による再生核 Hilbert 空間の構成

H_0 に対して，「H_0 の各点収束極限として表せる関数を付加する」行為が，完備化にあたることを示すことで，K-再生核 Hilbert 空間 $H = H_K(E)$ を構成する．これは K-再生核 Hilbert 空間上の任意のノルム収束列は各点収束すること（付録 C.2(4),(5)）に深く関係する．ここでは [Aronszajn, 1950] に従ったが，[Paulsen and Raghupathi, 2016] 定理 2.14 p.25 の方が短く簡潔である（本質的には同じ証明）．

定理 付録 D.1 ([Moore, 1939]). 任意の正定値関数 $K : E \times E \to \mathbb{C}$ に対して，ただ一つの再生核 Hilbert 空間 H が存在して，K を核に持つ：$H = H_K(E)$.

[証明]. [†23]

(1) $H_0 := \mathrm{Span}(\{K_p\}_{p\in E})$ 上に
$$\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j K_{p_j} \,\middle|\, \sum_{k=1}^M \beta_k K_{q_k} \right) = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \alpha_j \overline{\beta}_k K(q_k, p_j)$$
を考えると，これは内積を定める．

【証】. ノルム
$$F = \sum_{j=1}^N \alpha_j K_{p_j} \mapsto \|F\| := \sqrt{\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \overline{\alpha_k} K(p_k, p_j)}$$

[†22] [Saitoh and Sawano, 2016] 命題 1.1 p.3，(3), (4) は [Aronszajn, 1950] 第 1 部第 2 節 (5) p.344.

[†23] [Saitoh and Sawano, 2016] 定理 2.2 p.68，[Aronszajn, 1950] 第 1 部第 2 節 (4) p.344．[Paulsen and Raghupathi, 2016] 定理 2.14 p.25 は (3) の証明を別の方法で（[Aronszajn, 1950] が証明の後に注記している方法で）回避している．

から考える．すると，well-defined 性が，

$$F = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K_{p_j} = \sum_{j=1}^{M} \beta_j K_{q_j}$$

と 2 通りで表せるときに

$$\sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha}_k K(p_k, p_j) = \sum_{j,k=1}^{M} \beta_j \overline{\beta}_k K(q_k, q_j)$$

を示すことで得られる．実際，

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k=1}^{N} \alpha_j \overline{\alpha}_k K(p_k, p_j) &= \sum_{k=1}^{N} \overline{\alpha}_k \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K(p_k, p_j) = \sum_{k=1}^{N} \overline{\alpha}_k F(p_k) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \overline{\alpha}_k \sum_{j=1}^{M} \beta_j K(p_k, q_j) = \sum_{k=1}^{N} \overline{\alpha}_k \sum_{j=1}^{M} \beta_j \overline{K(q_j, p_k)} \\
&= \sum_{j=1}^{M} \beta_j \overline{\sum_{k=1}^{N} \alpha_k K(q_j, p_k)} = \sum_{j=1}^{M} \beta_j \overline{\sum_{k=1}^{M} \beta_k K(q_j, q_k)} = \sum_{j,k=1}^{M} \beta_j \overline{\beta}_k K(q_k, q_j).
\end{aligned}$$

well-defined 性を得ると，内積はこのノルムの極化によって得られる．□

(2) (1) の内積の構成から，H_0 上で

$$f(p) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K_{p_j}(p) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j (K_{p_j} | K_p) = (f | K_p), \qquad p \in E, f = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K_{p_j} \in H_0,$$

が成り立ち，さらに，

$$|f(p)| = |(f|K_p)| \leqslant \|f\| \|K_p\| = \sqrt{K(p,p)} \|f\|.$$

よって，$\|\mathrm{pr}_p|_{H_0}\| \leqslant \sqrt{K(p,p)}$ を得る．

(3) この証明の最大の特徴はこの段階にある．H_0 の完備化を考えようとも，通常の方法だと $\mathcal{F}(H)$ の部分集合ではなくなってしまう．$\mathcal{F}(H)$ の位相とは違うことに注意しながら，この上での完備化を考えるわけだが，

$$H := \left\{ f \in \mathcal{F}(E) \mid f \text{ は } \mathrm{Span}(\{K_q\}_{q \in E}) \text{ の点列の極限} \right\}$$

と定めると，これは H_0 の完備化となっており，さらに H_0 から定まる内積について Hilbert 空間をなす．これは任意の Cauchy 列 $\{f_n\} \subset H_0$ が 0 に各点収束するならばノルム収束もするため，補題と同様の議論を進めることが出来るためである．実際，

$$f_m = \sum_{p \in E} \alpha_p^{(m)} K_p, \qquad m \in \mathbb{N},$$

が 0 に各点収束するとき，

$$\|f_m\|^2 = (f_m | f_m) = \sum_{p,q \in E} \alpha_p^{(m)} \alpha_q^{(m)} K(q,p) = \sum_{q \in E} \alpha_q^{(m)} \sum_{p \in E} \alpha_p^{(m)} K_p(q) \xrightarrow{m \to \infty} 0.$$

■

補題 付録 D.2 (functional completion). 部分集合 $F \subset \mathcal{F}(E)$ には内積 $(-|-) : F \times F \to \mathbb{F}$ が定義されており，$(F, (-|-))$ は内積空間となるとする．このとき，次は同値：

(1) F のある完備化 $\overline{F}$ は，やはり $\mathcal{F}(E)$ の部分集合を台集合に持ち，その上で $\{\mathrm{pr}_p|_{\overline{F}}\}_{p \in E}$ は連続である．

(2) (i) 任意の $y \in E$ に対して，$\mathrm{ev}_y : F \to \mathbb{F}$ は有界：$\mathrm{ev}_y \in F^*$．
(ii) Cauchy 列 $\{f_m\} \subset F$ が 0 に各点収束するならば，$\|f_m\| \to 0$．

また，条件を満たす完備化 $\overline{F}$ は存在するなら一意である．

[証明]. [†24]

†24 [Aronszajn, 1950] 第 1 部第 4 節定理 p.347.

(1)⇒(2)　条件 (a) は連続関数の制限は連続であるから直ちに従う．条件 (b) を考える．$\{f_m\}\subset F$ が Cauchy 列ならば，$\overline{F}$ でも引き続き Cauchy 列であり，収束先 $f\in\overline{F}$ を持つ．すると，このとき f_n は f に各点収束することも必要であるから，$f=0$ である．$\overline{F}$ 上のノルム位相に関するノルムの連続性より，$\|f_n\|\to\|f\|=0$.

(2)⇒(1)　(i)　条件 (a) の下では，任意の Cauchy 列 $\{f_n\}\subset F$ について，ある関数 $f:E\to\mathbb{F}$ が存在して，これに各点収束する．

【証】．条件 (a) より，

$$|f_m(y)-f_n(y)|=|\mathrm{pr}_y(f_m-f_n)|\leqslant\|\mathrm{pr}_y\|\|f_m-f_n\|,\qquad y\in E.$$

よって，各点 $y\in E$ について $\{f_n(y)\}\subset\mathbb{F}$ は Cauchy 列であるから，$f(y):=\lim_{n\to\infty}f_n(y)$ と定めれば良い．□

(ii)　$\overline{F}\subset\mathcal{F}(E)$ を

$$\overline{F}:=\left\{f\in\overline{F}\mid f \text{ は } F \text{ の Cauchy 列の各点収束極限}\right\}$$

と定めると，定数列を取れば良いから $F\subset\overline{F}$ であり，また線型空間をなす．$\overline{F}$ 上にノルムを

$$\|f\|:=\lim_{n\to\infty}\|f_n\|$$

で定めると，条件 (b) の下では，これは $f\in\overline{F}$ に収束する列 $\{f_n\}$ の取り方に依らず，さらに F 上のノルムの延長である．

【証】．f への収束列 $\{f_n\},\{f'_n\}\subset F$ を任意に取る．このとき，$\{f'_n-f_n\}$ も F の Cauchy 列で 0 に各点収束する．条件 (b) から $\|f'_n-f_n\|\to 0$．これと次の評価を併せて，well-defined 性を得る：

$$\left|\lim_{n\to\infty}\|f'_n\|-\lim_{n\to\infty}\|f_n\|\right|=\lim_{n\to\infty}\Big|\|f'_n\|-\|f_n\|\Big|\leqslant\lim_{n\to\infty}\|f'_n-f_n\|=0.$$

□

(iii)　$\overline{F}$ 上のノルムについても中線定理が成り立ち続けるから，同じ内積について $\overline{F}$ は内積空間である．

(iv)　F は $\overline{F}$ 上稠密である．

【証】．任意の $f\in\overline{F}$ を取ると，これに各点収束する Cauchy 列 $\{f_n\}\subset F$ が存在する．このとき f にノルム収束もすることを示せば良いが，これは

$$\lim_{n\to\infty}\|f-f_n\|=\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\|f_m-f_n\|=0.$$

□

(v)　最後に，$\overline{F}$ が完備であることを示せば良い．

【証】．任意の Cauchy 列 $\{f_n\}\subset\overline{F}$ を取る．F は稠密であるから，Cauchy 列 $\{f'_n\}\subset F$ であって $\|f'_n-f_n\|\to 0$ を満たすものが取れる．例えば，列 $\{U_{1/n}(f_n)\}$ の積集合の元を任意に取れば良い．F 上の Cauchy 列 $\{f'_n\}\subset F$ 各点収束極限 f は存在し，$f\in\overline{F}$ なのであった．すると (iv) と同様の議論で，$\|f'_n-f\|\to 0$ も判る．すると $\|f_n-f\|\to 0$ も従う．□

■

命題 付録 D.3 (核の一意性). K を再生核，$H_K(E)$ を K-再生核 Hilbert 空間とする．

(1) $L:E\times E\to\mathbb{C}$ も [A1],[A2] と同じ条件
 (i) $\{L_p\}_{p\in E}\subset H_K(E)$.
 (ii) 任意の $p\in E$ について，$\mathrm{ev}_p=(-|L_p)$.
 を満たすとすると，$K=L$.

(2) $H_L(E)$ を L-再生核 Hilbert 空間とする．$K=L$ ならば，$H_L(E)=_{\mathrm{Ban}}H_K(E)$.

[証明]. †25

†25 (1) は [Saitoh and Sawano, 2016] 命題 2.2 p.71，(2) は [Paulsen and Raghupathi, 2016] 命題 2.3 p.18.

(1) これは Riesz 表現 $H_K(E) \to H_K(E)^*$ の単射性による．直接的に $p,q \in E$ を任意にとって $K(p,q) = L(p,q)$ も示してみる．まず，$H_K(E)$ の再生性 [A2] より，

$$L(p,q) = \mathrm{ev}_p(L_q) = (L_q|K_p).$$

一方で (2) より，

$$(L_q|K_p) = \overline{(K_p|L_q)} = \overline{K(q,p)} = K(p,q)$$

でもある．

(2) $\mathrm{Span}(\{K_q\}_{q\in E})$ は $H_K(E), H_L(E)$ のいずれでも稠密になる．あとは，この上で 2 つのノルムが一致することを示せば，閉包も一致するため，$H_K(E) = H_L(E)$ を得る．実際，任意の $f(p) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j K_{p_j}(p)$ を取ると，

$$\|f\|^2_{H_K(E)} = \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i\overline{\alpha_j}(K_{p_i}|K_{p_j}) = \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i\overline{\alpha_j}K(p_j,p_i) = \|f\|^2_{H_L(E)}.$$

■

付録 E　Brown 運動の核関数

定義 付録 E.1 ((standard) Brownian motion / Wiener process). [†26] $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上の実確率過程 $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ が**標準 Brown 運動**であるとは，次の 4 条件を満たすことをいう：

[B1] 中心性：$B_0 = 0$ a.s.
[B2] 加法性：任意の $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_n$ $(n \geqslant 2)$ について，増分 $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \cdots, B_{t_2} - B_{t_1}$ は独立．
[B3] 増分の正規性：任意の $0 \leqslant s < t$ について，$B_t - B_s \sim \mathrm{N}(0, t-s)$．
[B4] C-過程：殆ど確実に見本道 $t \mapsto B_t(\omega)$ は連続．

命題 付録 E.2 (Brown 運動の特徴付け). 実確率過程 $B = (B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ について，次の 2 条件は同値．

(1) B は [B1],[B2],[B3] を満たす．
(2) B は平均 0 共分散 $\Gamma(s,t) := \min(s,t)$ の Gauss 過程である．

[証明]. [†27]

(1)⇒(2)

(i) Gauss 過程であることを示すには，任意の $0 < t_1 < \cdots < t_n \in \mathbb{R}_+$ を取り，$B := (B_{t_1},\cdots,B_{t_n}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ が n 次元の正規分布に従うことを示せば良い．まず，仮定 [B1],[B2] より，$B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ は独立であり，それぞれが正規分布に従う．したがって，積写像 $A := (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ は n 次元正規分布に従う．行列

$$J := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

が定める線型変換を $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ とおくと，これは明らかに可逆で，$B = f(A)$ が成り立つ．ここで，任意の線型汎関数 $q \in (\mathbb{R}^n)^*$ に関して，$q(B) = q(f(A))$ は，$q \circ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が線型であることから，正規分布に従う．よって，B も正規分布に従う．

(ii) 仮定 [B3] より平均は $m(t) = E[B_t] = 0$ で，共分散は，$s \geqslant t$ のとき，増分の独立性 [B2] に注意して

$$\Gamma(s,t) = \mathrm{Cov}[B_s, B_t] = E[B_sB_t] = E[B_s(B_t - B_s + B_s)] = E[B_s(B_t - B_s)] + E[B_s^2] = s.$$

Γ の対称性より，これは $\Gamma(s,t) = \min(s,t)$ を意味する．

[†26] [Nualart and Nualart, 2018] 定義 1.2.1 p.2.
[†27] [Nualart and Nualart, 2018] 命題 1.2.2 p.2.

(2)⇒(1)

[B1] 分散を考えると，$\Gamma(0,0)=E[B_0^2]=0$．よって，$B_0=0$ a.s.

[B2] Gauss 過程であることより，組 $A:=(B_{t_n}-B_{t_{n-1}},\cdots,B_{t_2}-B_{t_1})$ は n 次元正規分布に従う．これらが独立であることを示すには，A の分散共分散行列 Σ_A の非対角成分がすべて 0 であることを示せば良い．平均が 0 で $\Gamma(s,t)=\min(s,t)$ であることより，任意の $1\leqslant i<j\in[n]$ について，共分散の双線型性に注意して，

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[B_{t_i}-B_{t_{i-1}},B_{t_j}-B_{t_{j-1}}]&=E[(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})(B_{t_j}-B_{t_{j-1}})]\\&=E[B_{t_i}B_{t_j}]-E[B_{t_{i-1}}B_j]-E[B_{t_i}B_{t_{j-1}}]+E[B_{t_{i-1}}B_{t_{j-1}}]\\&=i-(i-1)-i+(i-1)=0.\end{aligned}$$

[B3] 平均が 0 で $\Gamma(s,t)=\min(s,t)$ であることより，

$$E[(B_t-B_s)^2]=E[B_t^2]+E[B_s^2]-2E[B_tB_s]=t+s-2s=t-s.$$

■

参考文献

[Aronszajn, 1950] Aronszajn, N. (1950). Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American Mathematical Society*, 68(3):337–404.

[Dudley, 2002] Dudley, R. M. (2002). *Real Analysis and Probability*, volume 74 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, 2 edition.

[Gilbert and Hile, 1977] Gilbert, R. P. and Hile, G. N. (1977). Hilbert function modules with reproducing kernels. *Nonlinear Analysis: Theory, Mothods and Applications*, 1(2):135–150.

[Giné and Nickl, 2021] Giné, E. and Nickl, R. (2021). *Mathematical Foundations of Infinite-Dimensional Statistical Models*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press.

[Kallenberg, 2021] Kallenberg, O. (2021). *Foundations of Modern Probability*, volume 99 of *Probability Theory and Stochastic Modelling*. Springer Cham, 3 edition.

[Moore, 1939] Moore, E. H. (1939). *General Analysis, Part 2*, volume 1 of *Memoirs of the American Philosophical Society*. American Philosophical Society.

[Nashed and Wahba, 1974] Nashed, M. Z. and Wahba, G. (1974). Convergence rates of approximate least squares solutions of linear integral and operator equations of the first kind. *Mathematics of Computation*, 28(125):69–80.

[Nualart and Nualart, 2018] Nualart, D. and Nualart, E. (2018). *Introduction to Malliavin Calculus*, volume 8 of *Institute of Mathematical Statistics Textbooks*. Cambridge University Press.

[Oxtoby and Ulam, 1939] Oxtoby, J. C. and Ulam, S. M. (1939). On the existence of a measure invariant under a transformation. *Annals of Mathematics*, 40(3):560–566.

[Paulsen and Raghupathi, 2016] Paulsen, V. I. and Raghupathi, M. (2016). *An Introduction to the Theory of Reproducing Kernel Hilbert Spaces*, volume 152 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press.

[Rudin, 1991] Rudin, W. (1991). *Functional Analysis*. McGraw Hill, 2 edition.

[Saitoh and Sawano, 2016] Saitoh, S. and Sawano, Y. (2016). *Theory of Reproducing Kernels and Applications*, volume 44 of *Developments in Mathematics (DEVM)*. Springer Singapore.

[斎藤毅, 2009] 斎藤毅 (2009). **集合と位相**, volume 8 of **大学数学の入門**. 東京大学出版会.

[瀬戸 et al., 2021] 瀬戸, 道., 伊吹, 竜., and 畑中, 健. (2021). **機械学習のための関数解析入門**. 内田老鶴圃.